下 册 目 錄

第四篇 無窮級數

第五篇 微分學的進一步發展

第六篇 積分學的進一步發展

第四篇 無窮級數

第十八章 無窮的數値級數

§ 67. 基本概念

在每一個精確自然科學的領域中，除了用一些篇幅來闡明該領域中最重要的概念與規律之外，同時還要有一些章節來從事研究和建立某些專門工具，這樣我們才能够很好地掌握我們的研究對象。這些用來研究和建立專門工具的章節在理論上的意義不如它在技術上的意義那麼大。但是，儘管如此，它們在方法論上的重要性有時却是這樣大，以致於如果我們不對這些專門工具作系統的說明，就不可能建立任何完整的理論。例如，在熱學中，除了那些闡明熱學的基本原則理論的章節之外，還必須有講解溫度計的章節，換句話說，還必須有說明測量溫度的方法與工具的章節。

無窮級數的理論，就它跟數學分析的基本概念與規律的關係來說，就正是居於這樣一種輔助性的技術工具的地位；不過，儘管如此，由於它在數學分析本身以及立脚在數學分析之上的大量實用科學中的許許多多不同的應用，使得這個理論在現代數學方法的武庫中佔據着一個最重要的位置。所以，任何一本數學分析教程都不能不系統地說明關於無窮級數的理論。

無窮級數的基本概念是比較初等的，本來很早就可以講了，比方說，在講完極限和實數理論之後，就已經可以講了。我們之所以延遲到

現在才講，有兩個原因：首先是因為有必要讓讀者儘可能地早一些知道本書的基礎概念——微分與積分；其次，因為它對於進一步研究微分學與積分學是必不可少的，只有放在這裏講了以後，讀者才能够完全領會我們接下去就要講的幾章關於微分與積分理論的進一步更深刻的發展。

無窮級數的概念是很簡單的，大家在中學教科書裏已經知道得很清楚：已知一個遞減的幾何序列：

$$a, ar, ar^2, \cdots, ar^n, \cdots, \tag{1}$$

（其中 $0<|r|<1$，a 是任意實數）應該如何來求它的各項之和；這樣一種求和本身就正好完全表達出無窮級數概念。把序列 (1) 的前 n 項之和記作 s_n，則

$$s_n=\sum_{k=0}^{n-1} ar^k=\frac{a-ar^n}{1-r},$$

當 $n\to\infty$ 時，s_n 有一個極限：

$$\lim_{n\to\infty} s_n=\frac{a}{1-r},$$

這個極限稱為幾何序列(1)的"一切"項之和，記作：

$$\sum_{k=0}^{\infty} ar^k=\frac{a}{1-r}.$$

因此，在幾何序列的情形下，一系列無窮個數值有所謂它的"一切"項之"和"，這個和是這樣做成的：先求得這一系列數值的前 n 項之和 s_n（很明顯，s_n 是 n 的函數），然後再研究當 $n\to\infty$ 時 s_n 的動態。如果 s_n 趨向於一個確定的極限 s，我們就很自然地把 s 算作是這個系列的**一切**項之和。

然而，遞減的幾何序列遠非唯一的一個上面所說的這種類型的系列，比如說，系列

$$\frac{1}{1\cdot 2},\ \frac{1}{2\cdot 3},\ \frac{1}{3\cdot 4},\ \cdots,\ \frac{1}{n(n+1)},\ \cdots \tag{2}$$

就也同樣地具有所說的性質，事實上，因爲

$$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1},\quad (n=1,2,3,\cdots)$$

所以，對系列(2)來說，我們有：

$$s_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots$$
$$\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1},$$

因此，

$$\lim_{n\to\infty}s_n=1.$$

根據同樣的理由，既然我們已經認爲 $\frac{a}{1-q}$ 是幾何序列(1)的"一切"項的和，那麼現在我們當然可以說系列(2)的"一切"項的和就等於1，因而可以寫成

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)}=1.$$

另一方面，也很清楚，絕不是任何一系列無窮個數值都可以用以上所說的辦法來求和。例如，對系列

$$1,1,1,\cdots,1,\cdots$$

來說，我們就有 $s_n=n$；當 $n\to\infty$ 時，和數 s_n 無限增大，因而 s_n 就不可能有極限。其實，就算 s_n 保持有界，同樣的情形也還可以發生。例如，對系列

$$1,-1,1,-1,\cdots,1,-1,\cdots$$

來說，當 n 是偶數時，s_n 等於0。而當 n 是奇數時，s_n 却等於1；於是當 $n\to\infty$ 時，和數 s_n 雖然保持有界，但是却很明顯地不趨向於任何極限。

現在，我們可以轉到一般的定義了。假定我們有一系列無窮個實數

$$u_1, u_2, \cdots, u_n, \cdots; \tag{3}$$

令

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} u_k \qquad (n=1, 2, \cdots),$$

s_n 稱爲系列(3)的部分和。假定

$$\lim_{n\to\infty} s_n = s$$

存在，則我們說系列(3)是收斂的，而 s 是它的和；假定當 $n\to\infty$ 時，部分和 s_n 不趨向於任何極限，則我們說系列(3)是發散的，並且我們算它沒有和。

雖然把收斂級數(即收斂系列——譯者按，在原文中"系列""級數"兩個詞是同一個字 ряд，本來沒有區別，如果直譯應一律譯成"系列"，但遵從習慣仍改稱級數。但在這兒以前仍只能譯作"系列"，才符合作者的文意。)的和了解成爲它的一切項的和是很自然的事情，但是大家還是要相當小心：決不要忘記，求無窮級數(即無窮系列)的和，精確地說來，跟求有限和並不一樣；在無窮級數的求和的過程中，參與了一個新的運算，即極限的運算。因此，決不能沒有經過專門的考慮研究，就把有限和所具有的性質硬搬到無窮級數的和上來；事實上，我們在下面就會看到，這種搬移絕不是在一切情况下都可能的。

如果級數(3)收斂，而且它的和等於 s，則我們寫：

$$s = \sum_{k=1}^{\infty} u_k = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots;$$

如果當 $n\to\infty$ 時，$s_n \to +\infty$，則有時也寫成

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k = +\infty;$$

不過，在這種情形，我們從一般定義知道，這個級數是**發散**的，因而它並沒有和。

有時，我們就用 $u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$ 或者 $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ 來代表級數(系列)(3)本身，不管它收斂還是不收斂。例如，我們可以說級數 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)}$ 收斂；級數 $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k$ 發散（參考上面的例子）等等。

當級數(3)收斂時，它的和與部分和之差 $r_n=s-s_n$ 稱爲它的**餘項**；從收斂性的定義本身就立刻知道：

$$r_n\to 0 \qquad (n\to\infty),$$

換句話說，**當 $n\to\infty$ 時，收斂級數的餘項是一個無窮小量**(當然，發散級數沒有餘項，因爲它沒有和)。因爲

$$s=u_1+u_2+\cdots+u_n+u_{n+1}+\cdots,$$

$$s_n=u_1+u_2+\cdots+u_n,$$

所以我們很自然地希望會有：

$$r_n=s-s_n=u_{n+1}+\cdots+u_{n+k}+\cdots=\sum_{k=1}^{\infty}u_{n+k}=\sum_{l=n+1}^{\infty}u_l$$

這個等式在有限和的情形顯然是對的，但是我們沒有理由不經過任何證明就認爲它在無窮級數的情形也準對。不過證明起來倒是很簡單的，下面便是證明：令

$$\sum_{k=1}^{r}u_{n+k}=\sigma_r \quad (r=1,2,\cdots);$$

很明顯，$\sigma_r=s_{n+r}-s_n$；因爲當 $r\to\infty$，同時 n 保持不動時，$s_{n+r}\to s$；所以當 $r\to\infty$ 時，σ_r 的極限存在並且等於 $s-s_n=r_n$；但是根據 σ_r 的定

義，這個極限就是級數 $\sum_{k=1}^{\infty} u_{n+k}$ 的和；因此，這個級數收歛，並且它的和就是 r_n，這樣就證明了我們要證明的東西了。總之，在級數(3)收歛的時候對於任何 $n \geqslant 1$，我們都有

$$s = s_n + r_n,$$

其中

$$s_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n,\quad r_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+k} + \cdots.$$

根據級數(3)收歛的定義，收歛就等於要求部分和的序列

$$s_1, s_2, \cdots, s_n, \cdots \tag{4}$$

趨向於一個極限 s（這個 s 就稱爲級數的和）。因此，關於任何級數(3)的收歛性以及它的和的問題，都可以整個歸結到序列(4)的極限存在與它的極限值的問題。因而無窮級數理論的任何一個問題都可以用序列以及它的極限的術語來敍述。另一方面，也不難看出，級數理論與序列理論的這種聯系實際上是相互的關係。假定已經給出一個任意的實數序列(4)，令

$$u_1 = s_1,\quad u_n = s_n - s_{n-1}\quad (n > 1);$$

就很明顯地有：

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n = s_n\quad (n = 1, 2, \cdots),$$

於是，關於序列(4)的極限存在以及它的極限值的問題，就可以完全歸結到級數(3)的收歛性以及它的和的問題。

序列與無窮級數之間的這種基本聯系使得我們往往在證明了這兩個範圍中的一個的某個命題之後，就可以不用再加任何新的證明，立刻把這個命題搬到另一個範圍中去。在§19（定理2）中，我們曾經證明了序列(4)極限存在的必要充分條件如下：序列(4)的極限存在的必要充分條件是：不管 $\varepsilon > 0$ 怎樣小，對於充分大的 n 與任意的 $p > 0$，我們都有 $|s_{n+p} - s_n| < \varepsilon$。但是如果數 s_n 就是級數(3)的部分和，則一方面

$$s_{n+p}-s_n=u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{n+p}=\sum_{k=1}^{p}u_{n+k}$$

而另一方面，序列(4)的極限存在就等于說級数(3)收斂。所以我們已經得到了下列一般的級数收斂的必要充分条件：

定理 1. 級数(3)收斂的必要充分条件是：不管 $\varepsilon>0$ 怎样小，对于充分大的 n 与任意的 $p>0$，我們都有：

$$|u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{n+p}|<\varepsilon.$$

这个条件可以形式地說成是：級数的充分远的"片段"(長短不拘也卽不管它所包含級数的項的数目)的絕对値可以任意地小，特別当 $p=1$ 时，对于每一个收斂級数(3)，只要 n 充分大，就可以有 $|u_n|<\varepsilon$；換句話說，我們有下面的

推論. 如果級数(3)收斂，則当 $n\to\infty$ 时，$u_n\to 0$.

到現在为止，我們已經看到过的那些發散級数的例子中，都是当 $n\to\infty$ 时，u_n 不趋向于零的。因此，我們不免發生这样的疑問：剛才所說的級数收斂的必要条件 $u_n\to 0$（当 $n\to\infty$），是否同时也是級数收斂的一个充分条件？不难知道，答案应該是否定的。事实上，假定級数(3)是这样構成的：$u_1=1$, u_2, u_3 都等于$\frac{1}{2}$，再隨后三項卽 u_4, u_5, u_6 每項都等于$\frac{1}{3}$，这样下去以至無穷。于是很明显，一方面，当 $n\to\infty$ 时的确 $u_n\to 0$；另一方面，从等于$\frac{1}{k}$的那一項开始的以后 k 項所構成的級数"片段"的和永远等于 1。但是因为 k 可以任意大，所以这个級数到达無論多么远都会有总和等于 1 的"片段"。因此这个級数不能滿足定理 1 的条件，所以它是發散的。

这类級数的一个典型例子是調和級数——这是一个很富有啓發性的在許多方面都很重要的級数：

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots, \tag{5}$$

它滿足条件 $u_n\to 0(n\to\infty)$，但是級数"片段"

$$\sum_{n=2^k+1}^{2^{k+1}} \frac{1}{n}$$

包含了 $2^{k+1}-2^k=2^k$ 項，其中每一項都不小於它的最後一項 $\frac{1}{2^{k+1}}$；所以這個"片段"的值大於

$$2^k \frac{1}{2^{k+1}}=\frac{1}{2};$$

但是因爲這種"片段"可以在無論多遠的地方找到（k 可以任意大），所以定理 1 的條件也不能滿足，因而級數(5)發散。

無窮級數的概念，正如一切帶有高度一般性的概念一樣，它的充分發展，要求我們的討論更加具體化；只有當我們轉向於研究各種按具體特徵進行分類的級數時，才可能了解其全部內容。在本節中，我們只研究無窮級數的一般概念，其餘的我們不打算多談。

假定我們給定了兩個級數

$$u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots,$$

$$v_1+v_2+\cdots+v_n+\cdots;$$

於是級數

$$(u_1+v_1)+(u_2+v_2)+\cdots+(u_n+v_n)+\cdots \tag{6}$$

可以看作是這兩個給定的級數"逐項"相加(換句話說，第一個級數的每一項與第二個級數的具有相同號碼的項相加)的結果。假定兩個給定的級數都收斂，我們把它們的和分別記作 s 與 σ，它們的部分和記作 s_n 與 σ_n，於是

$$s_n \to s, \quad \sigma_n \to \sigma \quad (n\to\infty).$$

於是很明顯，級數(6)的前 n 項之和等於 $s_n+\sigma_n$，並且當 $n\to\infty$ 時，$s_n+\sigma_n\to s+\sigma$。所以，兩個收斂級數逐項相加永遠再給出一個收斂級數，並且這個新級數的和就等於原來兩個級數的和相加。很明顯，這個法則在兩個收斂級數逐項相減的情形也一樣成立(用同樣的方法證明)。

最後，如果我們用任意有限個收斂級數來代替上述的兩個收斂級

數，並逐項按任何組合法(當然對於一切項這個組合法要一樣)來組成它們的代數和，我們以上的論證在本質上不須要什麼改變就可以知道：這樣構成的級數還是永遠收斂，並且它的和就是這些已知級數的和的同一種代數和。因此，我們已經得到了下列命題：

定理 2. 假定級數

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_{1,k},\ \sum_{k=1}^{\infty} u_{2,k},\ \cdots,\ \sum_{k=1}^{\infty} u_{m,k}$$

都收斂，又它們的和分別等於 $s_1, s_2, \cdots, s_m$。於是，級數

$$\sum_{k=1}^{\infty} (u_{1,k} \pm u_{2,k} \pm \cdots \pm u_{m,k})$$

(其中對於一切項都取同一組組合符號，換句話說，在每一個"±"號中都取定一個"+"號或"−"號)也收斂，並且它的和就等於

$$s_1 \pm s_2 \pm \cdots \pm s_m.$$

這個定理有一個重要推論，它說明一個簡單事實：改變一個收斂級數的任何有限項的數值，不會破壞該級數的收斂性(雖然，一般說來，它的和也改變了)。換句話說，我們有下面的

推論. 假定在級數

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n + u_{n+1} + \cdots \tag{7}$$

與

$$v_1 + v_2 + \cdots + v_n + v_{n+1} + \cdots \tag{8}$$

中，對於某一個 $n \geqslant 0$，我們有：

$$u_{n+1} = v_{n+1},\quad u_{n+2} = v_{n+2},\quad \cdots,\ u_{n+k} = v_{n+k},\ \cdots,$$

又假定這兩個級數中有一個收斂，則另一個一定也收斂。

為了證明這個推理，我們只消指出以下這一點就够了：比方說，級數(8)可以由級數(7)與級數

$$(v_1-u_1)+(v_2-u_2)+\cdots+(v_n-u_n)+0+0+\cdots$$

(這個級數顯然收斂)逐項相加來得到。

當然,從這個推論還立刻可以知道,只要級數(7)與級數(8)中有一個發散,則另一個也一定發散。

數值級數的另外一個一般性質是:

定理 3. 如果級數

$$u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$$

收斂,並且有和 s,又如果 a 是一個任意常數;則級數

$$au_1+au_2+\cdots+au_n+\cdots$$

也收斂,並且它的和就等於 as。

爲了證明這個定理,只要指出下面這一點就够了:如果用 s_n 與 σ_n 分別表示這兩個級數的前 n 項之和,則對於任意的 n,都有 $\sigma_n=as_n$。

§67 的練習可以參看 Б. П. 提米多維奇的習題集,第五章,習題 1—3, 5, 11—12, 14—15, 21, 23, 24。

§ 68. 同號級數

我們前面已經指出過,爲了完全地揭露無窮級數概念的內容,我們現在應該集中注意於若干類具有某些特殊性質的級數,這些特殊性質使得這些類級數成爲最重要的同時也是最便於研究的級數。無窮級數理論的歷史發展告訴我們,這些類級數中的重要的一類,是那些一切項的符號都相同的級數。因而,我們首先應該來着手研究這種"同號的"級數。爲了確定起見,我們永遠假定級數的每一項都是正的(說得更正確一些,每一項都是非負的,因爲在一般情形下,允許有等於零的項存在是有好處的)。很明顯,根據對稱性負項級數(更正確地說,非正項級數)應該具有完全類似於正項級數的那些性質。

如果級數

$$u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots \tag{1}$$

的每一項都是非負的，又如果我們還是令

$$\sum_{k=1}^{n} u_k = s_n \quad (n=1, 2, \cdots),$$

則很明顯我們會有 $s_{n+1} \geqslant s_n$，其中 $n \geqslant 1$，換句話說，部分和構成一個不減序列。從而，在這種情形，當 $n \to \infty$ 時，只有兩種可能性：或者是 s_n 無限增大，$s_n \to +\infty$；或者是 s_n 保持有界，從而，我們知道 s_n 應該趨向於某一個極限 s；但是關係式 $s_n \to s$ $(n \to \infty)$ 就意味着級數(1)收斂並且它的和等於 s。因此，對於同號級數來說，收斂性的必要充分條件是它的部分和有界。在一般情形，當級數的項可以有不同的符號時，對級數的收斂性來說，這個條件自然還是必要的；但是它却不再是充分的了。比如就我們在 §67 中已經考慮過的發散級數

$$1+(-1)+1+(-1)+\cdots$$

來說，它的部分和就永遠等於 1 或 0，當然是有界的。

上述這個必要充分條件，在實用方面，可以給出判斷同號級數是否收斂的非常有效的判別法；絕大多數在分析以及它的應用中實際碰到的級數的收斂性，都可以直接間接用這些判別法來判定。不僅如此，這個條件還具有很大的理論價值；正是由於它，同號級數的理論才能夠這樣和諧，清楚，並且容易發展得遠遠地超過這個條件不成立的變號級數的理論。這個條件之所以有這樣重大的意義，其實是不難體會的，因為，根據原來的定義，要想解決一個給定的級數的收斂性問題，我們必須來研究作為 n 的函數 s_n 當 $n \to \infty$ 時是否趨向於某一個極限的問題；但是 s_n 關於 n 的表達式往往是很複雜的，不容易直接看出當 $n \to \infty$ 時它的極限狀態。然而常常不是很難就能够粗略地估計到 s_n 的值當 $n \to \infty$ 時是否是保持有界的；而這樣，在同號級數的情形，就已經立刻可以論斷級數的收斂性了。

我們來看一個例子。假定想要知道下列級數是否收斂：

$$\frac{1}{2+1}+\frac{1}{2^2+1}+\frac{1}{2^3+1}+\cdots+\frac{1}{2^n+1}+\cdots.$$

這個級數的部分和 s_n 的表達式是比較複雜的，我們很難直接從這個表達式作出當 $n\to\infty$ 時 s_n 是否有極限存在的結論。然而，由於

$$\frac{1}{2^k+1}<\frac{1}{2^k}\qquad(k=1,2,\cdots,n)$$

所以對於任何 $n\geqslant 1$，都有：

$$s_n<\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}=1-\frac{1}{2^n}<1.$$

因此 s_n 是有界的，從而知道給定的級數收斂。

以上所用的這個辦法經常被用來證實許多實際給出的級數的收斂性。這個方法可以一般地敍述如下：

定理 1. 假定我們有兩個正項級數：

$$u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots,\tag{u}$$

$$v_1+v_2+\cdots+v_n+\cdots,\tag{v}$$

如果有這樣一個正數 c 以及這樣一個自然數 n_0，使得對於任意一個 $n\geqslant n_0$ 都有：

$$u_n\leqslant cv_n,$$

則當級數 (v) 收斂時，級數 (u) 也收斂，或者，反過來說，級數 (u) 發散時，級數 (v) 也發散。

這個定理通常稱作"級數的比較原則"。

證明. 根據 §67 中定理 2 的推論，我們顯然可以就算作對於任意的正整數 n 都有 $u_n\leqslant cv_n$，這樣並不會失去我們論證的一般性。我們用 s_n 與 σ_n 來分別記級數 (u) 與 (v) 的部分和，很明顯，$s_n\leqslant c\sigma_n\ (n=1, 2,\cdots)$；如果級數 (v) 收斂，則 σ_n 有界，而這就說明級數 (u) 是收斂的，定理 1 就證明了。

級數的比較原則不僅可以用來研究具體的級數，而且可以用來導出一系列具有一定程度的一般性而且在應用上非常方便的收斂判別

法。現在我們就來建立某些這種判別法❶。

判別法 I (哥西). 如果找得到這樣一個正數 $r<1$, 使得對於所有充分大的 n 都有:

$$\sqrt[n]{u_n}\leqslant r,$$

則級數 (u) 收斂;如果有任意大的 n 使得

$$\sqrt[n]{u_n}\geqslant 1,$$

則級數 (u) 發散。

證明. 在第一種情形,對所有充分大的 n 都有:

$$u_n\leqslant r^n,$$

因而根據定理 1, 從級數 $r+r^2+\cdots+r^n+\cdots$ 的收斂性立卽推出級數 (u) 收斂。在第二種情形, 有無窮多個號碼 n 都使得 $u_n\geqslant 1$, 因而根據 §67 定理 1 的推論立刻知道級數(u)發散。

特別情形,當極限

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}$$

存在時,則從以上這個判別法不難得出下列

推論. 如果對於級數 (u) 來說, 極限 $\lim\sqrt[n]{u_n}=l$ 存在,則當 $l<1$ 時,級數收斂。$l>1$ 時,級數發散。

事實上, 如果 $l<1$, 則可以取正數 ε 這樣小, 使得 $l+\varepsilon<1$; 由 $\sqrt[n]{u_n}\to l(n\to\infty)$立刻知道,當 n 充分大時,$\sqrt[n]{u_n}<l+\varepsilon$。因此根據判別法 1 ,級數$(u)$收斂。如果 $l>1$, 則當 n 充分大時 $\sqrt[n]{u_n}>1$, 同樣根據判別法 1 知道級數 (u) 發散。

當 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=1$ 時,剛才這個推論不能對級數(u)的收斂與否作出任何結論。在這種情形級數(u)可能發散,例如級數

$$1+1+1+\cdots+1+\cdots$$

就是這樣。但是,我們馬上就會看到,這種級數也可能收斂。

❶ 從現在起直到 §68 爲止,一切談到的級數都假定是正項級數。

判別法 2（達朗貝爾）．如果有這樣一個正數 $r<1$ 存在，使得對於所有充分大的 n，都有：

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant r,$$

則級數 (u) 收斂。如果對於一切充分大的 n 都有：

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1,$$

則級數 (u) 發散。

證明．在第一種情形，對充分大的 n，我們有：

$$u_{n+1} \leqslant u_n r,$$

$$u_{n+2} \leqslant u_{n+1} r \leqslant u_n r^2,$$

$$u_{n+3} \leqslant u_{n+2} r \leqslant u_n r^3$$

一般來說

$$u_{n+k} \leqslant u_n r^k \ (k=1, 2, \cdots);$$

因此，根據定理 1，從級數 $u_n r + u_n r^2 + \cdots + u_n r^k + \cdots$ 的收斂性立刻知道級數 (u) 收斂。

在第二種情形，級數 (u) 的項從某個地方起顯然構成一個不減的正數序列；因此關係 $u_n \to 0 (n \to \infty)$ 不可能成立，從而根據 §67 定理 1 的推論知道級數 (u) 發散。

跟判別法 1 一樣，判別法 2 也有一個

推論．如果對於級數 (u)，極限 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$ 存在，則當 $l<1$ 時，級數 (u) 收斂，當 $l>1$ 時，級數 (u) 發散。

這個命題的證明跟判別法 1 的推論的證明完全一樣，因此我們留給讀者自己去做。也跟那裏一樣，當 $l=1$ 時，我們也不能直接作出關於級數 (u) 是否收斂的任何結論。

例 1．我們來考慮級數

$$\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\cdots.$$

這裏

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}}=\frac{1}{n+1}\to 0\ (n\to\infty);$$

即 $l=0$；所以級數收斂；我們在 §39 中就會知道，這個收斂級數的和等於 $e-1$.

進一步的練習可以參看 Б. П. 捷米多維奇的習題集，第五章，習題 28—32.

上述所講的兩個判別法，從它們的證明就可以清楚的看出來，是基於把所給的級數與某一個幾何級數相比較而得到的結果．所以這兩個判別法，只能應用到那種級數的項遞減的速度比某一個幾何級數的項遞減得更快的級數上去。但是這種級數我們應該認爲是收斂得比較"特別"的級數；它們的項減小得很快，因而當 n 增大時級數的餘項 r_n 很快地趨向於零，也就是說，部分和 s_n 很快地趨向於它的極限 s. 我們說，這種級數"收斂得很快"。級數收斂得越快，當然實際計算起來也就越方便；比方說，如果 s_4 就已經達到了我們所要求於量 s 的精確程度時，則我們只要求出級數的前四項之和就够了；在級數收斂得很慢的情形，爲了要達到同樣精確的程度也許就須要計算到(比如說) s_{1000}. 這就使得我們碰到技術上很複雜的計算。正是在這樣一個意義上，有時候我們說收斂得非常慢的級數"在實際上是發散的"，因爲雖然當 n 充分大時 s_n 可以無限逼近 s, 但是要達到所要求的精確程度，n 必須取得這樣大，以至於要實際求和簡直是辦不到的事情。

對於那些比任何幾何級數都收斂得慢的級數來說，上述兩個判別法都無法應用了。這種級數的具體表現是：剛才在兩個判別法的推論中都提到的極限 l 通常都等於 1。對於這種級數，我們必須付出更大的勞動來尋找更精細的，更敏銳的判別法，而這樣做是必要的．因爲好多類

在實踐上有很大價值的級數屬於這種收斂得很慢的級數之列。

我們從考慮最重要的一類級數

$$\frac{1}{1^s}+\frac{1}{2^s}+\cdots+\frac{1}{n^s}+\cdots \tag{2}$$

着手，其中 s 是任意一個實常數，當 $s\leqslant 0$ 時，級數（2）顯然是發散的，因此我們只須考查 s 是正數的情形。當 $s=1$ 時，這個級數就是調和級數，它的發散性在 §67 中已經考查過。又因為當 $s<1$ 時，我們有：

$$\frac{1}{n^s}\geqslant\frac{1}{n} \qquad (n=1,2,\cdots),$$

所以根據級數的比較原則（定理 1），由於調和級數發散，就立刻知道當 $s<1$ 時級數（2）也發散。這樣一來，剩下的只是要考查 $s>1$ 的情形了。

現在我們要證明當 $s>1$ 時級數（2）收斂。假定 $k>1$，是任意一個自然數。因為當 $0<x\leqslant k$ 時我們顯然有 $x^{-s}\geqslant k^{-s}$，因此

$$\int_{k-1}^{k} x^{-s}\,dx\geqslant\int_{k-1}^{k} k^{-s}\,dx=\frac{1}{k^s};$$

在這個不等式中陸續令 $k=2,3,\cdots n$，然後把這樣得到的 $n-1$ 個不等式加起來，就得到：

$$\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^s}\leqslant\int_{1}^{n} x^{-s}\,dx=\frac{1}{s-1}-\frac{1}{(s-1)n^{s-1}}<\frac{1}{s-1},$$

因為 $s>1$，這就說明了當 $s>1$ 時級數（2）的部分和是有界的，我們知道，這就保證了級數（2）收斂。

以上我們用來證明級數（2）當 $s>1$ 時收斂的方法，是常常會用到的方法；在 §107（定理 5）中我們將給予它以一般的理論根據。這裏我們要指出，這個方法不僅可以用來判定級數（2）的收斂性，而且用這種方法可以給級數的餘項以很方便的估計，事實上，根據前面所說的，當 $k>1$ 時，我們有：

$$\int_{k}^{k+1} x^{-s}\,dx \leqslant \frac{1}{k^s} \leqslant \int_{k-1}^{k} x^{-s}\,dx.$$

把這些不等式按照 k 從 n 到 $n+r$ 加起來，就得到：

$$\int_{n}^{n+r+1} x^{-s}\,dx \leqslant \sum_{k=n}^{n+r} \frac{1}{k^s} \leqslant \int_{n-1}^{n+r} x^{-s}\,dx,$$

或者，把兩個積分都算出來，就是

$$\frac{1}{(s-1)n^{s-1}} - \frac{1}{(s-1)(n+r+1)^{s-1}} \leqslant \sum_{k=n}^{n+r} \frac{1}{k^s} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{(s-1)(n-1)^{s-1}} - \frac{1}{(s-1)(n+r)^{s-1}};$$

讓 $r\to\infty$ 取極限，就得到：

$$\frac{1}{(s-1)n^{s-1}} \leqslant \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^s} \leqslant \frac{1}{(s-1)(n-1)^{s-1}}.$$

例 2. 當 $s=3$ 時，我們有：

$$\frac{1}{2n^2} \leqslant \frac{1}{n^3} + \frac{1}{(n+1)^3} + \frac{1}{(n+2)^3} + \cdots \leqslant \frac{1}{2(n-1)^2}.$$

級數 (2) 的收斂性不可能用我們前面所說的兩個判別法中的任何一個來判定。特別是我們前面談到的兩個推論中的極限

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n}, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n},$$

對級數(2)來說，不管 s 等於多少，它們都等於 1. 事實上，令

$$\sqrt[n]{n^{-s}} = c_n \quad (n=1, 2, \cdots),$$

我們有：

$$\ln c_n = -s\,\frac{\ln n}{n},$$

因而(參看 §37 例 5)，當 $n\to\infty$ 時，

$$\ln c_n \to 0,\quad c_n \to 1.$$

同樣，不管 s 等於多少，都有：

$$\frac{\dfrac{1}{(n+1)^s}}{\dfrac{1}{n^s}}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-s}\to 1\ (n\to\infty).$$

正像我們以前的兩個判別法是在與幾何級數相比較的基礎上建立起來的一樣，我們可以把級數拿來與 (2) 型的級數比較，從而得到更精細的判別法。以下我們就來建立這種判別法中的一個。

判別法 3（拉阿北），如果有這樣一個數 $r>1$ 存在，使得對於所有充分大的 n，都有：

$$n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)\geqslant r, \tag{3}$$

則級數

$$u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots \tag{u}$$

收斂；如果對於所有充分大的 n，都有：

$$n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)\leqslant 1, \tag{4}$$

則級數 (u) 發散。

證明．1．在第一種情形下，我們任意取一個大於 1 小於 r 的數 r' $(1<r'<r)$。很明顯，當 $n\to\infty$ 時，量

$$\frac{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{r'}-1}{\dfrac{1}{n}}$$

趨向於函數 $(1+x)^{r'}$ 在點 $x=0$ 的導數，換句話說，趨向於數 r'；因為 $r'<r$，所以對於充分大的 n，我們有：

$$\frac{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{r'}-1}{\dfrac{1}{n}}<r$$

從而

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{r'}<1+\frac{r}{n}.$$

因此，由(3)式得出

$$\frac{u_n}{u_{n+1}}>1+\frac{r}{n}>\left(1+\frac{1}{n}\right)^{r'}=\left(\frac{n+1}{n}\right)^{r'},$$

或即

$$n^{r'}u_n>(n+1)^{r'}u_{n+1};$$

這就說明了當 n 充分大時，乘積 $n^{r'}u_n$ 隨着 n 的增大而減小，因而，當 $n\to\infty$ 時這個乘積是有界的；換句話說，一定有這樣一個數 $c>0$ 存在，使得

$$n^{r'}u_n<c \qquad (n=1,2,\cdots),$$

或即

$$u_n<\frac{c}{n^{r'}} \qquad (n=1,2,\cdots).$$

因爲 $r'>1$，根據我們上面才證明的結果，級數 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{r'}}$ 收斂；因此，根據比較原則我們知道級數(u)也收斂。

2. 在第二種情形下，從(4)式得出：

$$\frac{u_n}{u_{n+1}}\leqslant\frac{n+1}{n},$$

或即

$$nu_n\leqslant(n+1)u_{n+1};$$

因此，如果 n 充分大$(n\geqslant n_0)$，乘積 nu_n 就不會隨着 n 的增大而減小；從而只要我們令 $n_0u_{n_0}=c$，就有當 $n\geqslant n_0$ 時，$nu_n\geqslant c$，或即

$$u_n\geqslant\frac{c}{n};$$

而因爲調和級數是發散級數，所以我們根據比較原則就知道級數(u)也發散。這就完全證明了判別法了。

跟前面兩個判別法完全一樣，從判別法 3 也可以得到一個推論。

推論. 如果對於級數(u)，極限

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)=l$$

存在，則當 $l>1$ 時級數(u)收斂，當 $l<1$ 時級數(u)發散。

這個推論的證明我們也留給讀者自己去作。當 $l=1$ 時級數(u)也是既可能收斂也可能發散。

例 3. 假定當 $n\geqslant 2$ 時

$$u_n=a^{-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-1}\right)},$$

其中 a 是一個正的常數。我們不難求出

$$\frac{u_n}{u_{n+1}}=a^{\frac{1}{n}},$$

從而

$$n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)=\frac{a^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}.$$

當 $n\to\infty$ 時上式的極限值等於函數 a^x 在 $x=0$ 的導數，即 $\ln a$。根據判別法 3 當 $a>e$ 時級數(u)收斂，當 $a<e$ 時級數(u)發散。當 $a=e$ 時就還須要作進一步的研究。

我們不難提供一些簡單級數的例子，對於這些級數來說，判別法 3 還嫌過於粗略。我們剛才已經碰到過一個這樣的級數（上一個例子中 $a=e$ 的情形）。讀者不妨自己證明，這個判別法不能判斷任何一個下列形式的級數是否收斂：

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^s}$$

這裏 s 是一個正的常數。事實上，我們能夠找到更加精細的可以解決上面提出的問題的判別法。在二十五章中我們要學會這樣一個完全新

型的判別法，這個判別法是建立在積分學的基礎之上，用它就不難掌握這類更複雜的級數。

練習題可以參看 Б. П. 提米多維奇的習題集，第五章，問題 42 與 45。

§ 69. 變號級數

現在我們來研究各項符號不一定相同的級數。

首先，我們分出一類所謂的交錯級數，它的各項的符號依次地正負交錯。比方說，所有號碼是奇數的項都是正的，而所有號碼是偶數的項都是負的那種級數就是。這種級數我們常常把它寫成下列形式：

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \cdots + u_{2k-1} - u_{2k} + \cdots, \tag{1}$$

當然，這裏所有的 u_n 都是正數。在各種應用中都常常碰到這種交錯級數；而且在理論上這種級數也有它的價值，這主要是因爲我們常常用一個極簡單的判別法就可以判斷這類級數的收斂性，現在我們就來證明這一個簡單判別法。

定理 1（萊布尼茲）。*假定對於任意的 $n \geqslant 1$ 都有不等式 $u_{n+1} \leqslant u_n$ 成立，並且 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$，則交錯級數(1)收斂。*

因此，對交錯級數來說，$\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ 加上各項的絕對值單調減小就保證了交錯級數收斂（在一般情形當然不見得能這樣，例如調和級數就滿足這兩個條件，但它並不收斂）。

證明． 跟通常一樣，我們把級數（1）的部分和記作 s_n。對任意的 $k \geqslant 2$，我們有：

$$s_{2k} - s_{2k-2} = u_{2k-1} - u_{2k} \geqslant 0;$$

因此，序列

$$s_2, s_4, \cdots, s_{2k}, \cdots \tag{2}$$

是不減的，但是另一方面

$$s_{2k} = u_1 - (u_2 - u_3) - (u_4 - u_5) - \cdots - (u_{2k-2} - u_{2k-1}) - u_{2k},$$

因爲等式右邊的被減項都不是負的，所以

$$s_{2k}\leqslant u_1 \qquad (k=1, 2, \cdots);$$

因此不減序列(2)有上界，這就說明極限

$$\lim_{k\to\infty} s_{2k}=s$$

存在。要證明所有號碼是奇數的項的部分和也趨向於同一個極限 s，只消注意

$$s_{2k+1}=s_{2k}+u_{2k+1},$$

因而當 $k\to\infty$ 時，根據已經證明的 $s_{2k}\to s$ 與定理的假定 $u_{2k+1}\to 0$ 就得出

$$s_{2k+1}\to s \qquad (k\to\infty),$$

這就證明了定理 1.

最簡單，在實用上也常常碰到的一個典型的交錯級數是：

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}+\cdots, \tag{3}$$

根據定理 1 這個級數收斂。假如我們把這個級數的每一項換成它的絕對值，則我們得到一個發散級數(調和級數)。這就說明，級數(3)的收斂性不僅僅以它的各項(絕對值)迅速減少爲先決條件，而且還以它的各項符號交錯分佈爲先決條件。

同時，級數(3)還說明了級數本身收斂而由它的各項的絕對值所構成的級數却可以是發散的。在整個變號級數理論中最基本重要的事實，是剛才這句話反過來不對，換句話說，只要一個級數的各項絕對值構成的級數收斂，這個級數就也是收斂的。假定

$$u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots \tag{u}$$

是任意變號級數。我們有下述定理。

定理 2. 如果級數

$$|u_1|+|u_2|+\cdots+|u_n|+\cdots \tag{|u|}$$

收斂，則級數 (u) 也收斂。

證明. 假定 n 與 k 是任意兩個自然數。根據 § 67 的定理 1，從級數(|u|)的收斂性立刻知道，和數

$$|u_{n+1}|+|u_{n+2}|+\cdots+|u_{n+k}|$$

可以任意地小，只要取 n 充分大，但是因爲

$$|u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{n+k}|\leqslant|u_{n+1}|+|u_{n+2}|+\cdots+|u_{n+k}|,$$

所以對任意的 k，$|u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{n+k}|$ 這個量，當 n 充分大時，也可以任意小。同樣根據 §67 的定理 1，就知道級數(2)收斂，於是定理 2 證完。

我們從上面已經可以看出，收斂的變號級數很自然地分成了兩類：級數(|u|)也收斂的構成一類，級數(|u|)發散的構成另一類。我們把第一類級數稱爲絕對收斂級數，第二類級數則稱爲條件收斂級數(爲什麼這樣稱呼，我們很快就會明白)。這兩類收斂級數之間的差別是非常之大的，無論對數學分析本身以及它的很多應用來說，這個差別具有基本重要的意義。大體上這個差別可以這樣說：幾乎一切有限和的性質都可以搬到絕對收斂級數上來，從而這種級數的運算可以按照有限和的運算法則來進行；但反過來，對條件收斂級數來說，則許多有限和在具體計算上具有重大價值的簡單性質都沒有了，就因爲這樣，條件收斂級數在實際應用上受到很大的限制。

很明顯，同號收斂級數永遠是絕對收斂級數，所以我們剛才所說到的困難對同號級數來說是不會發生的。特別說來，我們在下節中就要對絕對收斂級數建立的全部定理，對於一切同號級數都自然適用。

在本節結束之前，我們還要引進一個時常要用到的關於一般變號級數的判別法。假定 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n, \cdots$ 與 $\beta_1, \beta_2, \cdots \beta_n, \cdots$ 是具有下述性質的兩個實數序列：1)α_n 都是正數，單調減小($\alpha_{n+1}\leqslant\alpha_n$)並且 $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=$ $=0$；2)有這樣一個常數 c 存在，使得對一切 $n\geqslant1$ 都有 $|\sigma_n|=|\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_n|<c$，換句話說，以 β_n 爲一般項的數值級數具有有界的部分

和。令 $u_n=\alpha_n\beta_n$ $(n=1, 2, \cdots)$ 我們要來證明以 u_n 爲一般項的級數(u)收斂。

爲了這個目的，我們應用一般收斂判別法(§ 67 的定理 1)。根據這個判別法，我們只消證明對任意的 $\varepsilon>0$，只要 n 充分大就不管 $p>0$ 是怎樣一個正整數，都有

$$|u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{n+p}|<\varepsilon.$$

我們有：

$$\rho(n, p)=u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{n+p}=$$
$$=\alpha_{n+1}\beta_{n+1}+\alpha_{n+2}\beta_{n+2}+\cdots+\alpha_{n+p}\beta_{n+p},$$

或即，令

$$\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_k=\sigma_k \quad (k=1, 2, \cdots),$$

$$\rho(n, p)=\alpha_{n+1}(\sigma_{n+1}-\sigma_n)+\alpha_{n+2}(\sigma_{n+2}-\sigma_{n+1})+\cdots$$
$$\cdots+\alpha_{n+p}(\sigma_{n+p}-\sigma_{n+p-1})=$$
$$=-\sigma_n\alpha_{n+1}+\sigma_{n+1}(\alpha_{n+1}-\alpha_{n+2})+\sigma_{n+2}(\alpha_{n+2}-\alpha_{n+3})+\cdots$$
$$\cdots+\sigma_{n+p-1}(\alpha_{n+p-1}-\alpha_{n+p})+\sigma_{n+p}\alpha_{n+p};$$

假定我們把 n 取得這樣大，使得 $\alpha_{n+1}<\frac{\varepsilon}{2c}$；於是根據不等式 $|\sigma_k|<c$，與 $\alpha_{k+1}\leqslant\alpha_k$(任意的 k)，不管 $p>0$ 是一個什麼樣的正整數，我們都有：

$$|\rho(n, p)|\leqslant c\alpha_{n+1}+c(\alpha_{n+1}-\alpha_{n+p})+c\alpha_{n+p}=2c\alpha_{n+1}<\varepsilon,$$

而這就證明了我們的斷言。因此我們已經得到了下列判別法。

定理 3(迪里赫勒)。*假定 $\alpha_n\to0$ $(n\to\infty)$，又對於任意的 $n\geqslant1$ 都有：*

$$\alpha_{n+1}\leqslant\alpha_n, \quad |\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_n|<c,$$

其中 c 是一常數。則級數

$$\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\cdots+\alpha_n\beta_n+\cdots$$

收斂。

特别是，如果我們選擇 $\beta_n=(-1)^{n-1}$，則不難看出，我們剛好得到

定理 1，因此定理 1 是定理 3 的一個特殊情形。

例. 對於任意的 k，我們都有：

$$\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)x-\sin\left(k-\frac{1}{2}\right)x=2\sin\frac{x}{2}\cos kx$$

把這個等式依 k 從 1 到 n 加起來，就得到：

$$\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x-\sin\frac{1}{2}x=2\sin\frac{x}{2}\sum_{k=1}^{n}\cos kx,$$

從而，如果 $\sin\frac{1}{2}x\neq 0$，就有：

$$\sum_{k=1}^{n}\cos kx=\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x-\sin\frac{1}{2}x}{2\sin\frac{x}{2}},$$

因此，對於任意的 $n\geqslant 1$，都有：

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\cos kx\right|<\frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}.$$

假設令 $\alpha_n=\frac{1}{n}$，$\beta_n=\cos nx$，則根據定理 3 我們就立刻知道：只要 x 不是 2π 的倍數，級數

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n} \tag{4}$$

就收斂；當 $x=\pi$ 時，級數(4)變成了級數

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n},$$

這個級數的收斂性我們上面已經證明了；當 $x=2\pi$ 時，級數(4)就變成調和級數。

§ 69 的練習讀者可以在 Б. П. 捷米多維奇的習題集的第五章，習題 74—77, 85—86, 89, 96 中找到。

§ 70. 級數的運算

1. 有限和的一個最重要的性質是它的可交換性，換句話說，它的和與相加的次序無關；我們很自然地會問，這個性質是否可以搬到無窮級數上來；換句話說，一個無窮收斂級數在任意顛倒它的各項的次序後，是否還能保持它的收斂性與它的和的大小？現在我們來證明，無論是絕對收斂級數還是條件收斂級數，這個問題都可以得到解答，而且正好是兩個彼此相反的答案。

定理 1. 如果級數

$$u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots \tag{u}$$

絕對收斂並且它的和等於 s，則任意顛倒級數 (u) 的各項次序所作成的級數

$$v_1+v_2+\cdots+v_n+\cdots \tag{v}$$

還是絕對收斂的，並且它的和也同樣等於 s.

證明. 令

$$\rho_n=\sum_{k=n+1}^{\infty}|u_k|,$$

於是 $\rho_n\to 0$ $(n\to\infty)$。假定 $\varepsilon>0$ 是任意一個正數又 n 這樣大，使得 $\rho_n<\varepsilon$。級數(u)的前 n 項 $u_1, u_2, \cdots u_n$ 與級數(v)的某些項 $v_{i_1}, v_{i_2}, \cdots v_{i_n}$ 完全一樣。假定 m_n 是 $i_1, i_2, \cdots i_n$ 中最大的一個。於是，很明顯，對任意的 $m\geqslant m_n$，和數

$$\sigma_m=\sum_{k=1}^{m}v_k$$

中除了有 $u_1, u_2, \cdots u_n$ 外，還可能包含更多的號碼 $k>n$ 的 u_k。因此，如果令

$$\sum_{k=1}^{n} u_k = s_n \quad (n=1, 2, \cdots),$$

我們就有：

$$\sigma_m = s_n + q,$$

其中 q 是某些號碼 $k>n$ 的 u_k 的總和，因而

$$|q| \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} |u_k| = \rho_n < \varepsilon,$$

於是

$$|\sigma_m - s| = |s_n - s + q| \leqslant |s_n - s| + |q| =$$

$$= \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k \right| + |q| \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} |u_k| + |q| < 2\varepsilon.$$

這裏只要唯一的條件就是要 m 充分大。因此，我們已經證明了級數 (v) 收斂，並且它的和就是 s。這個級數的絕對收斂性差不多是顯然的；事實上，和數

$$\sum_{k=1}^{n} |v_k|$$

不是別的，正是正項的收斂級數 $|u_1| + |u_2| + \cdots + |u_n| + \cdots$ 的某 n 項之和，因此，對於任何一個 n 它都不會大過這個級數的和，從而當 $n\to\infty$ 時，$\sum_{k=1}^{n} |v_k|$ 保持有界。由此可見，級數 $\sum_{k=1}^{\infty} |v_k|$ 收斂，也就是級數 (v) 絕對收斂。

現在我們轉而討論條件收斂級數，我們首先要證明一個輔助性的定理。其實，這個輔助定理本身就具有極特出的意義。

引理．**如果級數 (u) 條件收斂，則它所有的正項構成一個發散級**

數 (u^+)，它所有的負項也同時構成一個發散級數 (u^-)。

證明. 我們把級數 (u) 的部分和 s_n 中那些屬於級數 (u^+) 的各項之和記作 s_n^+，屬於級數 (u^-) 的各項之和記作 s_n^-，於是 $s_n=s_n^++s_n^-$。因爲級數 (u) 收斂，所以當 $n\to\infty$ 時部分和 s_n 趨向於一個確定的極限；因此，等式 $s_n=s_n^++s_n^-$ 告訴我們，如果當 $n\to\infty$ 時 s_n^+ 與 s_n^- 中只要有一個有極限存在，另一個的極限也就一定存在；但是這樣一來，它們二者之差 $s_n^+-s_n^-$ 也就要趨向於一個確定的極限，然而這個差顯然就等於

$$|u_1|+|u_2|+\cdots+|u_n|,$$

從而，級數 (u) 絕對收斂，這與定理的假設發生矛盾。因此，不論是 s_n^+ 還是 s_n^-，都不能在 $n\to\infty$ 時趨向於確定的極限，換句話說，級數 (u^+) 與級數 (u^-) 都是發散級數。這就證明了我們的引理。

定理 2. 如果級數 (u) 條件收斂，則適當地顛倒它各項的次序，可以作成發散級數，也可以作成收斂級數，並且在後一種情形，我們可以使得作出的收斂級數具有任意事先給定的和 s。

證明. 1. 爲了得到發散級數，我們把級數 (u) 的各項作如下的安排。一開始我們先取級數 (u) 的若干個正項，使得它們的和大於 1（根據引理這是可以辦到的）。在這些項的後面我們放上級數 (u) 的第一個負項，然後我們再在餘下的正項中取若干項也使得它們的和大於 1，然後在這些項之後再放上第二個負項；這種安排，由於我們有引理的保證，可以一直繼續下去以至無窮。並且很明顯，級數 (u) 的每一項都會或早或晚地在這個新級數中出現。由於這一個新級數在無論多遠的地方都還有數值大於 1 的片段出現，所以根據 §67 的定理 1 它是一個發散級數。

2. 要想得到具有任意事先給定的和數 s 的收斂級數，我們對級數的項作如下的安排。爲了確定起見，我們不妨假定 $s\geqslant 0$。我們一開始先取級數 (u) 的正項（按它們在原來級數中的次序），只要它們的和還不大於 s 我們就一直取下去。但是根據引理，我們遲早會取到這個和大

於 s 的。當我們這樣取得的和剛剛大過 s，我們就立刻轉而取級數 (u) 的負項（也是按照它們的自然順序來取），只要整個（包含已取的正項）這個和還不小於 s，我們就一直取下去；同樣根據引理，總會來到一個時候，這個和又開始小於 s。於是我們又重新按級數 (u) 的次序取它還沒有被取走的正項，等等。這樣無盡無休地作下去，我們得到一個新級數

$$v_1+v_2+\cdots+v_n+\cdots,$$

很明顯，這個級數的項的確只是級數 (u) 的全部項用另外一個次序重排出來的。令

$$\sum_{k=1}^{n} v_k=\sigma_n \qquad (n=1,2,\cdots).$$

假定 $\varepsilon>0$ 任意小。因爲當 $n\to\infty$ 時 $v_n\to 0$，所以可以找到這樣一個數 m 使得當 $n\geqslant m$ 時，$|v_n|<\varepsilon$。我們來考慮任何一個 $\sigma_n(n\geqslant m)$；如果 σ_n 與 σ_{n-1} 中一個比 s 大，一個比 s 小，則

$$|\sigma_n-s|<|\sigma_n-\sigma_{n-1}|=|v_n|<\varepsilon.$$

如果 σ_n 與 σ_{n-1} 都比 s 大或者都比 s 小，則根據我們建立級數 (v) 的原則，σ_n 總是比 σ_{n-1} 更接近於 s。因此，在任何情形下，σ_n 與 s 的距離或者小於 ε，或者小於 σ_{n-1} 與 s 的距離。由此可見，從某一個號碼起級數 (v) 的部分和 σ_n 與 s 的距離永遠小於 ε。但是因爲 ε 可以任意小，所以 $\sigma_n\to s(n\to\infty)$，而這就證明了我們的定理。

就這樣，我們看到了條件收斂級數移項運算的結果，是完全不肯定的一大堆東西，適當地使用這個運算可以得到以任意給定的數作爲和數的收斂級數，也可以得到發散級數。

附註. 很明顯，我們以上考慮的，級數重新排列會影響到它的收斂性以及它的和數的問題，只有在顚倒次序的項有無窮多的情形下才會發生。事實上，如果顚倒次序的項，比如說，只是一些號碼小於某一個

m 的項，則從 s_m 開始，以後所有的部分和都跟沒有重排前完全一樣；因此，如果原來的級數收斂，則重排後的級數也收斂，並且它的和也不會改變。

2. 有限和的另一個重要性質是可分配性：要想把兩個有限和乘起來，只要用一個和的每一項去乘另一個的每一項，然後把這樣得到的所有的乘積加起來就行了。因此，一個很有意義的事情，是我們想知道分配律，對無窮級數來說，是否也是正確的。不過這個問題也可以從另一個觀點來看：在 §67 中我們已經看到任意兩個（或更多個）收斂級數永遠可以逐項相加或相減；現在我們很自然地會提出這樣一個問題：是否兩個收斂級數也可以逐項交錯相乘呢？

定理 3. 如果級數

$$u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots=s \qquad (u)$$

與

$$v_1+v_2+\cdots+v_n+\cdots=\sigma \qquad (v)$$

都絕對收斂，則一切乘積 u_iv_k $(i, k=1, 2, \cdots)$ 按照任意一個次序排列起來所構成的級數也絕對收斂，並且它的和就等於 $s\sigma$。

證明. 我們用 $w_1, w_2, \cdots, w_n, \cdots$ 來表示按某一個次序排好的 u_iv_k $(i, k=1, 2, \cdots)$ 形式的乘積，然後我們來考慮級數

$$|w_1|+|w_2|+\cdots+|w_n|+\cdots \qquad (|w|)$$

假定 $S_n (n=1, 2, \cdots)$ 是級數 $(|w|)$ 的部分和。S_n 是由 $|u_iv_k|$ 這種形式的項相加而成的。在 S_n 中這種項的全部號碼 i 與 k 中有一個最大的；我們把這個最大值記作 m。如果我們把下列兩個有限和

$$A_m=|u_1|+|u_2|+\cdots+|u_m|,\ B_m=|v_1|+|v_2|+\cdots+|v_m|$$

乘起來，則在這個乘積中，顯然可以找到 S_n 中的所有的項 $|u_iv_k|$。因此

$$S_n \leqslant A_mB_m.$$

但是級數 (u) 與級數 (v) 都絕對收斂，因此部分和 A_m 與 B_m 都是有界的；從而上述不等式說明，級數 $(|w|)$ 的部分和 S_n 也是有界的，因而級

数($|w|$)收斂。

剩下来我們只要証明級数

$$w_1+w_2+\cdots+w_n+\cdots \tag{w}$$

的和(当然,級数(w)是收斂的,这可以从級数(w)的絕对收斂性推出来)就等于 $s\sigma$。为此目的,我們首先指出由于級数(w)的絕对收斂性,所以要求它的和,我們可以任意安排級数的項(即乘积 u_iv_k)的次序(定理 1)。我們安排这些項的次序如下:先取 u_1v_1,其中最大号碼等于 1;然后再取最大号碼等于 2 的一切項(共有三項:u_1v_2, u_2v_2, u_2v_1);然后再取最大号碼等于 3 的一切項(共有五項:$u_1v_3, u_2v_3, u_3v_3, u_3v_2, u_3v_1$)等等。如果我們取这个重排后的級数的部分和取到最大号碼为 m 的那一部分項为止,則这个部分和很明显地就是由所有的 u_iv_k ($1\leqslant i\leqslant m$, $1\leqslant k\leqslant m$)組成的;換句話說,它就等于 $s_m\sigma_m$,其中

$$s_m=u_1+u_2+\cdots+u_m,\quad \sigma_m=v_1+v_2+\cdots+v_m;$$

但因为当 $m\to\infty$ 时 $s_m\to s$ 又 $\sigma_m\to\sigma$,所以上面所說的那些部分和当 $m\to\infty$ 时趋向于 $s\sigma$。但是因为級数(w)收斂,所以这些部分和的極限就是級数(w)的和数。这就証明了定理 3。

更細致的分析(我們这里不再介紹了)告訴我們,要得到我們上面所說的結論,只要假定級数(u)与級数(v)中有一个絕对收斂就够了(当然,另外一个就是条件收斂級数)。但是这时乘积 u_iv_k 的排列已不能任意,而应依照某种完全确定的順序来排列。

在兩个級数都是条件收斂的情形,一般来說,这兩个級数不再能逐項交錯相乘。因此,对于分配定律,一般来說,只有絕对收斂級数才跟有限和的情形完全一样。

本节練習可以參看 Б. П. 捷米多維奇的習題集,第五章,習題 116, 119。

§ 71. 無穷乘積

可以將加法运算应用到任意多个被加項,同样地,关于算术中的另

一个运算——乘法，也可以將它应用到任意多个因子的相乘。在加法的情形，当我們讓項数無限增多，再应用極限概念，就得到無穷級数求和的概念。因为乘法的性質有很多与加法的性質类似，所以我們完全有理由期望，如果讓因子的个数無限增多，則利用極限概念，我們应該能够引出新的有益的概念。

假定 $z_1, z_2, \cdots, z_n, \cdots$ 是任意一个实数序列。令

$$z_1 z_2 \cdots z_n = \prod_{k=1}^{n} z_k = \pi_n \quad (n=1, 2, \cdots),$$

称为該序列的“部分乘积”，如果当 $n\to\infty$ 时極限

$$\lim_{n\to\infty} \pi_n = \pi \tag{1}$$

存在，則跟無穷級数的情形一样，我們很自然地就把 π 取来作为“所有的” z_n 的乘积，并且写作：

$$\pi = \prod_{k=1}^{\infty} z_k = z_1 z_2 \cdots z_n \cdots.$$

假定所有的項 $z_n (n=1, 2, 3, \cdots)$ 都是正的。于是

$$\lg \pi_n = \sum_{k=1}^{n} \lg z_k;$$

如果極限 (1) 存在而且 $\pi\neq 0$，則根据对数函数的連續性，就可以从 $\pi_n\to\pi$ 推出 $\lg \pi_n \to \lg \pi$，換句話說，

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \lg z_k \to \lg \pi \ (n\to\infty).$$

这就說明，正的極限(1)的存在是級数

$$\lg z_1 + \lg z_2 + \cdots + \lg z_n + \cdots \tag{2}$$

收斂的必要条件，并且这个級数的和就等于 $\lg \pi$。反过来，如果級数(2)收斂，則当 $n\to\infty$ 时，量

$$s_n=\sum_{k=1}^{n}\lg z_k=\lg(z_1z_2\cdots z_n)=\lg\pi_n$$

趨向於一個確定的極限，而這就說明部分乘積 π_n 也趨向於一個確定的極限（這裏，這個極限的對數存在，所以它必定是正的）。這樣一來，我們已經得到下面的結論：（在 z_n 都是正數的情形）異於零的極限（1）存在的必要充分條件是級數（2）收斂。從這個結果我們已經可以看出，在無窮乘積的理論中 $\pi=0$ 的情形應該處於一個特殊地位。

現在假定 z_n 具有任意的符號（我們只假定它們當中沒有一個等於零，因爲如果有某一個 $z_k=0$，則對於一切 $n\geqslant k$ 都顯然有 $\pi_n=0$，從而 π_n 的極限狀態毫無意思）。很明顯我們有：

$$z_n=\frac{\pi_n}{\pi_{n-1}}\quad(n=2,3,\cdots).$$

假定極限(1)存在。於是當 $n\to\infty$ 時 $\pi_n\to\pi$，$\pi_{n-1}\to\pi$，從而如果 $\pi\neq0$，

$$z_n\to\frac{\pi}{\pi}=1\qquad(n\to\infty);$$

正好像收斂級數的第 n 項，當 $n\to\infty$ 時，要趨向於零一樣，具有異於零的極限 π 的無窮乘積的第 n 個因子，當 $n\to\infty$ 時，一定趨向於 1。我們可以看出來，就在這裏，$\pi=0$ 的情形居於一種特殊的地位；我們不難舉出例子，當 $\pi=0$ 時，上述的結論一般說來是不正確的；爲此，我們來看看下面的例子：

$$z_n=\frac{1}{2}\quad(n=1,2,\cdots);$$

我們有 $\pi_n=\frac{1}{2^n}\to0\ (n\to\infty)$，同時，$z_n$ 永遠等於 $\frac{1}{2}$，因而它不趨向於 1 $(n\to\infty)$。

因此，我們再一次看出了，只有那種極限（1）存在而且不是零的無窮乘積，才或多或少地類似於收斂的級數。這種看法在理論的進一步發展中，還要一再被新的事實證明其爲正確。因此我們採取下列定義

是適當的:

如果極限(1)存在而且不爲零,則我們說無窮乘積

$$z_1z_2\cdots z_n\cdots=\prod_{n=1}^{\infty}z_n \tag{3}$$

收斂;如果這個極限不存在,或者雖然存在但是却等於零,則我們說無窮乘積(3)發散。

當無窮乘積收斂時,則我們把極限 π 叫做無窮乘積的值;因此,收斂的無窮乘積的值永遠是不等於零的數;發散的無窮乘積沒有任何的值。

我們已經知道,收斂乘積的第 n 個因子當 $n\to\infty$ 時趨向於1。由此可見,在每一個收斂乘積(3)中,從某一個 n 起 z_n 都是正數;因此,這種乘積只可能含有有限個負因子。如果我們把這些負因子的符號都加以改變,則整個乘積或者只是變一個符號,或者乾脆一點也不變,總而言之,乘積所受的影響是無關大局的。因此我們可以在下面永遠假定所有的 z_n 都是正的,這絲毫也不會喪失我們研究的對象的一般性。再者,因爲對於收斂乘積來說,$z_n\to1$ $(n\to\infty)$,所以爲了方便起見,常常最好是令 $z_n=1+u_n$,從而把無窮乘積寫成下面這樣的形式:

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+u_n); \tag{4}$$

其中在任何情形下,都有 $-1<u_n<+\infty$,而且在乘積收斂時有 $u_n\to0$ $(n\to\infty)$。

當然,不待說,無窮乘積理論也有它自己的首要問題,即判別法的建立問題,跟級數的情形一樣,要用這些判別法來判別一個給定的無窮乘積是收斂還是發散,我們已經知道乘積(4)的收斂性跟級數

$$\sum_{n=1}^{\infty}\lg(1+u_n) \tag{5}$$

的收斂性等價；這一個聯系就使得我們可以利用關於級數的已知的判別法來建立關於乘積收斂性的判別法。特別說來，在 §67 中所建立的級數收斂的一般判別準則就使我們能够作出如下的結論：對於任意一個 $\varepsilon>0$，只要 n 充分大，就不管 $k>0$ 是怎麼樣的一個正整數，都永遠有

$$\left|\sum_{i=n+1}^{n+k}\lg(1+u_i)\right|<\varepsilon, \tag{6}$$

這個條件是級數(5)，從而也就是乘積(4)，收斂的必要充分條件，因爲

$$\sum_{i=n+1}^{n+k}\lg(1+u_i)=\lg\left\{\prod_{i=n+1}^{n+k}(1+u_i)\right\},$$

所以不等式(6)總可以換作不等式❶

$$\left|\prod_{i=n+1}^{n+k}(1+u_i)-1\right|<\eta,$$

其中 η 跟 ε 一樣，是一個任意小的正數。因此，要想一個無窮乘積收斂，必需，而且只需，任意一個足够遠的(隨便多長的)"片段"的值任意地逼近 1，在這個意義下，我們得到了乘積與級數之間的完全類似之點。必需注意的是，這種完全類似的情况，是只有當乘積的收斂性是像上面那樣定義的時候才能够得到的(卽當 $\lim\limits_{n\to\infty}\pi_n=\pi=0$ 時乘積要算作是發散的)。

跟級數的情形一樣，我們在上面所得到的這個判別法具有很大的理論價值，但是很少用它來判別一個具體的乘積是否收斂。要想得到更加容易付諸實踐的判別法，跟級數的情形一樣，我們還應該從一般的概念轉而來討論更加具體的某些確定種類的無窮乘積。當然，一個很自然地首先要提出的問題是，什麼樣的乘積應該算作是相當於同號級數的，又什麼樣的乘積相當於異號級數。

收斂級數的項隨着它的號碼的增大而趨向於零；如果級數是同號

❶ 當一個數的對數爲任小的時候，而且也只有當這個時候，它才任意地趨近於 1。

的，則它所有的項或者全是正的或者全是負的；換句話說，所有的項都位於極限值 0 的同一邊，在收斂的無窮乘積的情形，這個極限值等於 1；因此我們應該認爲類似於同號級數的乘積是那種全部因子都大於 1 或者都小於 1 的無窮乘積。如果乘積表成了(4)的形式，則這就說明，u_n 或者全是正的，或者全是負的。對於這一類無窮乘積，我們有很簡單的而且便於應用的收斂準則：

定理 1. 如果乘積(4)中所有的 u_n 同號，則乘積(4)收斂的必要充分條件是級數

$$u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots \tag{7}$$

收斂。

證明. 首先我們不妨假定當 $n\to\infty$ 時 $u_n\to 0$。因爲，如果不是這樣的話，則正如我們所已知的，乘積(4)與級數(7)兩者都發散，於是定理 1 的結論已經成立。現在我們分別考慮兩種可能的情形。

1. 假定 $u_n\geqslant 0(n=1,2,\cdots)$。因爲當 $x\to 0$ 時

$$e^x=1+x+o(x), \tag{8}$$

則當 n 充分大時

$$e^{\frac{1}{2}u_n}\leqslant 1+u_n\leqslant e^{2u_n}.$$

我們不妨算作這一個不等式對所有的 n 都成立，因爲去掉有限項並不影響級數與乘積的收斂性。因此，如果我們令

$$\sum_{k=1}^{n}u_k=s_n,\quad \prod_{k=1}^{n}(1+u_k)=\pi_n,$$

我們就有：

$$e^{\frac{1}{2}s_n}\leqslant\pi_n\leqslant e^{2s_n}\quad (n=1,2,\cdots). \tag{9}$$

如果級數(7)收斂，則當 $n\to\infty$ 時部分和 s_n 保持有界，但是根據不等式(9)的第二部分，π_n 也就保持有界；又因爲 $\pi_{n+1}\geqslant\pi_n(n\geqslant 1)$，所以乘積(4)收斂。反過來，如果乘積(4)收斂，則當 $n\to\infty$ 時 π_n 保持有界；根據

不等式(9)的第一部分，s_n 也要保持有界，從而級數(7)收斂。

2. 假定 $u_n\leqslant 0(n=1,2,\cdots)$。同樣由關係(8)知道，當 n 充分大時

$$e^{2u_n}\leqslant 1+u_n\leqslant e^{\frac{1}{2}u_n},$$

我們這裏同樣不妨算作這個不等式對所有的 n 都成立，從而

$$e^{2s_n}\leqslant \pi_n\leqslant e^{\frac{1}{2}s_n}\quad(n=1,2,\cdots).\tag{10}$$

如果級數(7)收斂，則當 $n\to\infty$ 時 s_n 有界（這一次是 $s_n\leqslant 0(n=1,2,\cdots)$，從而 s_n 有界的意思，就是說有這樣一個正數 A 存在，使得對於任意一個整數 n 都有 $s_n>-A$)；於是根據不等式(10)的第一部分知道 $\pi_n\geqslant e^{-2A}$ $(n=1,2,\cdots)$；又因爲現在 $\pi_{n+1}\leqslant\pi_n(n\geqslant 1)$，所以當 $n\to\infty$ 時 π_n 趨向於某一正的極限 $\pi\geqslant e^{-2A}$，換句話說，乘積(4)收斂。反過來，如果乘積(4)收斂，則 $\pi_n\to\pi>0(n\to\infty)$，這裏很明顯，$\pi_n\geqslant\pi(n=1,2,\cdots)$；從而不等式(10)的第二部分就給出：

$$e^{\frac{1}{2}s_n}\geqslant\pi,\ s_n\geqslant 2\ln\pi(n=1,2,\cdots),$$

換句話說，當 $n\to\infty$ 時部分和 s_n 保持有下界；因此，級數(7)收斂。

例　從調和級數的發散性立刻知道，當 $n\to\infty$ 時

$$\left(1+\frac{1}{1}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{n}\right)\to+\infty,$$

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n}\right)\to 0.$$

從級數

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

的收斂性知道，兩個乘積

$$\left(1+\frac{1}{1^2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\ 與\ \left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$$

當 $n\to\infty$ 時，都趨向於正的極限。

更進一步的練習讀者可以參看 Б. П. 捷米多維奇的習題集，第五章，習題 403，413，419，420，425。

第十九章　無窮的函數級數

§ 72. 函數級數的收斂區域

假定 $u_1(x), u_2(x), \cdots, u_n(x)$ 是一個確定在某個區間 (a, b) 上的以 x 為自變量的函數的序列。如果我們寫出無窮級數

$$u_1(x)+u_2(x)+\cdots+u_n(x)+\cdots, \tag{1}$$

則對於 x 在區間 (a, b) 上的每一個值 x_0, 這個級數都變成一個數值級數

$$u_1(x_0)+u_2(x_0)+\cdots+u_n(x_0)+\cdots,$$

這個級數有時收斂,也有時發散。我們把(1)型的級數叫做確定在區間 (a, b) 上的一個無窮的函數級數或者簡單一點，一個函數級數。函數級數是數學分析中的基本研究工具之一。整個數值級數的理論（在第十八章中我們已經研究過它的一些初步性質)，在數學分析的範圍內，可以在某種程度上，看成是函數級數理論的一個序篇。現在我們就來進而研究函數級數的理論。

首先我們要考慮，應該怎樣把收斂級數這個基本概念搬到函數級數上面來。上面我們已經說過,對於區間 (a, b) 上的變量 x 的每一個數值,函數級數(1)都變成一個數值級數,因此在第十八章的意義下,表達式(1)就可以看成不僅是一個數值級數,而是整個的一族數值級數。一般來說,這些級數中,有一些是收斂的,也有些是發散的。因此這就很清楚了,對於"級數(1)是收斂的還是發散的"這個問題來說，在一般情形下,我們就不能給予一個統一的回答。由此可見,像上面這樣來提出問題不能適應於函數級數的本質。問題的正確提法應該是這樣：對於區間 (a, b) 上的那些 x 的值級數(1)收斂,又對於那些 x 的值級數(1)發散？因此，函數級數的收斂性是一個局部性的概念;因為一般說來,這個收斂性可以在一個區間 (a, b) 的某些點成立,而在另一些點不成立。

因此，只有在特別情形，當級數(1)在區間(a, b)的每一點都收斂(或發散)時，才可以合理地說，這個級數在區間(a, b)上收斂(或發散)。

區間(a, b)上，能使級數(1)收斂的那種點稱爲這個級數的收斂點；相應地，那些使級數(1)發散的點就稱爲發散點。因此，對於每一個確定在區間(a, b)上的函數級數來說，這個區間的點就自然地分成了兩個集合——級數(1)的收斂點的全體與發散點的全體。這兩個集合中的第一個，稱爲這個級數的收斂區域，而第二個叫作發散區域。在特殊情形下，這兩個集合中可以有一個是空的。

函數級數的理論告訴我們，級數的收斂區域與發散區域有時可以是結構異常複雜的集合；並且這種現象，即使對於那種各項都是簡單初等函數的級數也可以發生；例如我們在第二十一章中要學習的三角級數就是這樣。在這裏，我們只考慮一個簡單的例子。

級數

$$1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots$$

的一切項在整個數軸上$(-\infty<x<+\infty)$都是確定的，對於x的每一個值，級數本身都是一個幾何級數。很明顯，這個級數的收斂區域是開區間$-1<x<1$，而發散區域則由不等式$|x|\geqslant 1$來確定。

仿照數值級數的情形，我們把

$$s_n(x)=\sum_{k=1}^{n}u_k(x)$$

形式的和稱爲級數(1)的部分和。如果級數(1)在點x收斂，則$\lim\limits_{n\to\infty}s_n(x)=s(x)$存在。函數$s_n(x)$在區間$(a, b)$的每一點都是確定的，但函數$s(x)$(稱爲級數(1)的和)却只在級數的收斂點才確定。我們把函數$r_n(x)=s(x)-s_n(x)$仍然叫做給定的級數的餘項。當然，不管n等於多少，函數$r_n(x)$只在級數(1)的收斂區域上才有意義。在收斂區域的每一點x我們都有

$$\lim_{n\to\infty} r_n(x)=0.$$

§ 73. 一致收斂性

上面已經說過，函數級數

$$u_1(x)+u_2(x)+\cdots+u_n(x)+\cdots \tag{1}$$

的收斂性是一個局部性的概念。當我們說有這樣一個級數在某一個區間(a,b)上收斂時，我們的意思只是說，它在這個區間的每一個個別的點上都收斂，因此，這種說法並沒有能冲淡以致去掉收斂概念的局部性。然而我們可以引進在一個區間上函數級數的另一個收斂概念，這個概念不再是它在個別點的收斂性的總和，而是沒有局部性，只有"整體"（全局）性的一個概念。這個概念對於函數級數的理論及其應用來說都具有基本重要的意義，所以我們現在要盡量仔細地來考慮這個概念。

假定級數(1)（它的部分和記作$s_n(x)$）在區間(a,b)的每一點都收斂，並且假定它的和是$s(x)$，於是對於區間(a,b)的每一點x，級數的餘項$r_n(x)=s(x)-s_n(x)$當$n\to\infty$時都趨向於零。說得更詳細一點，就是：對於任意的$\varepsilon>0$與任意的x $(a\leqslant x\leqslant b)$，都可以找到一個自然數$n_0$，使得對於任何一個$n\geqslant n_0$，都有

$$|r_n(x)|<\varepsilon. \tag{2}$$

這個自然數n_0，也就是不等式(2)開始成立的"地方"，顯然不僅與ε有關，還要與區間(a,b)上選出的點x有關。因為對於不同的x的值，我們從(1)得出不同的數值級數，所以一般說來，$|r_n(x)|$從什麼地方開始變得永遠比ε小，這個開始的地方是要隨着這些不同的級數而不同的。那麼，我們是不是能夠找到一個n_0使得只要$n\geqslant n_0$，不等式(2)對於區間(a,b)上所有的點x都同時成立呢？如果x的值只有有限個，則事情就很簡單，因為對應於每一個x的值，有一個確定的n_0的值，從

而不同的 n_0 也只有有限個；從這些 n_0 的值中取出最大的那一個，我們顯然就找到了這樣一個"地方"，從那裏開始，不等式(2)對於所有(這有限個) x 的值都成立。但是區間 (a,b) 上 x 的值並非有限個而是有無窮多個，對於它們當中的每一個都有它自己的一個 n_0 所以不同的 n_0 也就有無窮多個。我們都知道，在自然數這個無窮集合中就永遠找不到最大的；因此我們應該認爲，那種從它開始，不等式(2)就對於區間 (a,b) 上所有的點都成立的 n_0，是有可能不存在的。同時，我們也看到了，這種現象之所以有可能發生的原因，是對於給定的區間的每一點，那個從它開始就永遠有 $|r_n(x)|<\varepsilon$ 的地方來到的時間，有早有遲；對於一些點，這個地方來得早一些，對於另一些點，它又來得晚一些；對於某些 x，級數收斂得快一些，對於另一些 x 又收斂得慢一些。我們可以這樣說，級數在一些點上收斂的快慢"落後"於在另一些點上收斂的速度，所以雖然級數在所有的點 $x(a\leqslant x\leqslant b)$ 都收斂，但是它的收斂性是"不一致的"，對於 x 的某一些值快些，對於另一些值却又慢些。

有了以上的說明，下面的定義就顯得很自然了。

如果不管 $\varepsilon>0$ **是怎樣的一個數，都可以找到這樣一個自然數** n_0，**使得對於任何的** $x(a\leqslant x\leqslant b)$ **不等式**(2)**都成立，我們就說級數**(1)**在區間** (a,b) **上一致收斂**。

函數級數的這個新的收斂概念，顯然已經沒有局部性，換句話說，已經完全不是級數在個別點的收斂問題，而在本質上面要牽涉到它在各個點上收斂快慢的比較。首先我們應該來考慮**不一致**收斂的級數的存在問題。是不是級數(1)可以在區間 (a,b) 的每一點收斂而不在這個區間上一致收斂呢？關於這個問題，我們還記得一個在某種程度上跟它相彷的問題，那就是我們在 § 23 中討論過的一致連續性的問題；在那裏，我們先把函數在區間上的連續性局部地用它在區間上每一點的連續性去定義，然後我們再定義**一致**連續的概念，它好像是一個比較狹的概念，已經不具有局部性質了；但是，後來我們又發現(§ 23 的定理

5)：每一個(在閉區間上)連續的函數同時也是一致連續的；換句話說，我們發現：一致連續這個新概念，按照它的實質來說，並不是嶄新的。現在，在我們這裏，如果每一個在區間 (a, b) 的每一點收斂的級數也都在這個區間上一致收斂的話，那末跟連續函數的情形就沒有什麼兩樣了。但是我們立刻就會看到，事實並非如此。

我們令

$$u_1(x)=x,\quad u_n(x)=x^n-x^{n-1}\qquad (n>1)$$

然後我們在區間(0, 1)上來考慮級數(1)。我們有

$$s_n(x)=x+(x^2-x)+\cdots+(x^n-x^{n-1})=x^n.$$

因此，當 $0\leqslant x<1$ 時

$$\lim_{n\to\infty} s_n(x)=\lim_{n\to\infty} x^n=0,$$

同時，當 $x=1$ 時 $s_n(1)=1\,(n=1, 2, \cdots)$，這就說明

$$\lim_{n\to\infty} s_n(1)=1.$$

因此，如果我們令

$$s(x)=\begin{cases}0 & (0\leqslant x<1)\\ 1 & (x=1)\end{cases}$$

我們就有：

$$s_n(x)\to s(x)\qquad (0\leqslant x\leqslant 1);$$

換句話說，級數(1)在區間(0, 1)的每一點都收斂而且它的和就是 $s(x)$。

現在我們來證明這個級數不是一致收斂的。很明顯，對於任意一個自然數 n，點

$$x_n=\frac{1}{\sqrt[n]{2}}$$

都屬於區間 $(0, 1)$，但是

$$s_n(x_n)=x_n^n=\frac{1}{2},\quad s(x_n)=0,$$

從而

$$r_n(x_n)=s(x_n)-s_n(x_n)=-\frac{1}{2},\quad |r_n(x_n)|=\frac{1}{2}.$$

只要 $\varepsilon<\frac{1}{2}\left(\text{例如 }\varepsilon=\frac{1}{4}\right)$，就不管 n 多末大，總可以在區間 (0,1) 上找到這樣一個點 x_n，在這個點上

$$|r_n(x_n)|>\varepsilon;$$

因此，不管 n 多末大，不等式(2)不可能對於區間(0, 1)上所有的點都成立。而這正好說明，我們的級數在區間(0, 1)上不是一致收斂的。

一個很重要的事情，是我們應該學會能够直觀地來設想我們這裏所發生的現象。在圖 47 中我們畫出了 $n=1$, $n=2$ 以及 n 的值很大時函數 $y=s_n(x)$的圖形。不管我們選取滿足 $0\leqslant x<1$ 的那一點 x，我們都看到隨着 n 的增大，量 $s_n(x)$就逐漸減小並且趨向於零，圖形告訴我們，對於大的 n, $s_n(x)$可以小到無足輕重。但是不管我們把 n 選得多末大，對於距離 1 很近的 x 的值(例如像我們已經知道的，對於$x=\frac{1}{\sqrt[n]{2}}$)，$s_n(x)$ 還是離開它的極限（零）很遠：在曲綫 $y=s_n(x)$ 上總可以找到縱坐標距零很遠的點；並且如果我們一次又一次地讓 n 增大，我們還是永遠可以找到這種點(這些點只是改變它們的位置，越來越靠近右邊)。這樣一來，我們前面說過的收斂的"落後性"，就在這裏直觀地擺在我們眼前了。

讀者不難證明，不管 $\varepsilon>0$ 怎樣小，上面這個級數在區間 $(0, 1-\varepsilon)$ 總是一致收斂的。因此，只是級數的各項在點 1 的極端附近的性質破壞了這個級數在區間 (0, 1) 上的一致收斂性。

這樣，我們已經看到了，函數級數在一個區間上的收斂性可以是不一致的。這說明了，我們所引進的這個級數一致收斂的概念，比起以前建立在局部性的基礎上的函數收斂概念，在實質上是更爲狹隘的。在以下各節中，我們要討論一系列的重要的一般性問題，我們就會看到，

關於這些問題的解決，一致收斂概念具有基本重要的意義。現在，我們還只能先來討論下面的問題，那就是：在什麼條件下我們可以斷定一個級數在一個給定的區間上是一致收斂的。

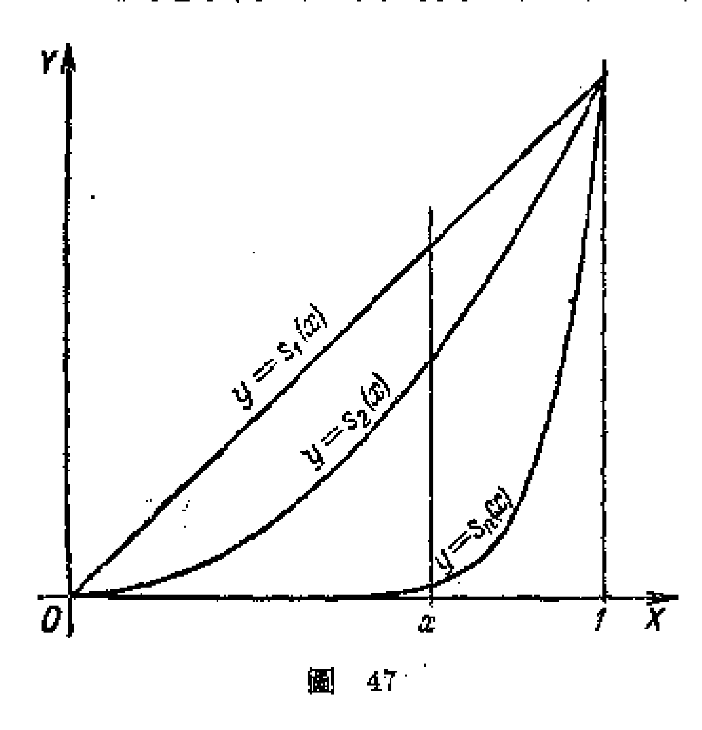


圖 47

首先，類似於 § 67 中關於數值級數的定理 1，我們有下列一致收斂性的必要充分（從而在理論上具有很大價值的）條件。

定理 1. 級數（1）在區間 (a, b) 上一致收斂的必要充分條件是：不管 $\varepsilon>0$ 多末小，對於一切充分大的 n，不等式

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)\right| = |u_{n+1}(x)+u_{n+2}(x)+\cdots+u_{n+p}(x)|<\varepsilon, \qquad (3)$$

對於一切自然 p 以及區間 (a, b) 上所有的點 x，都成立。

證明. 1. 如果級數(1)在區間 (a, b) 上一致收斂，則當 $n \geqslant n_0$ 又 p 是任意一個自然數時，

$$|r_n(x)|<\frac{\varepsilon}{2}, \quad |r_{n+p}(x)|<\frac{\varepsilon}{2}, \quad (a \leqslant x \leqslant b),$$

因此，

$$|r_{n+p}(x)-r_n(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)\right| < \varepsilon \quad (a \leqslant x \leqslant b),$$

這就證明了條件的必要性。

2. 因為 $r_n(x)=\lim\limits_{p\to\infty}\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)$，所以，如果不等式(3)，對於任意

的自然數 p 以及區間 (a,b) 的任意點 x 都成立時，我們就有：

$$|r_n(x)|\leqslant\varepsilon\quad(a\leqslant x\leqslant b)\tag{4}$$

因此，從定理 1 的條件已經推出：對於任意的 $\varepsilon>0$，只要 n 充分大時，不等式(4)就成立。這說明，級數(1)在區間 (a,b) 上一致收斂；因此，條件的充分性也證明了。

在具體情況下，要斷定一個級數的一致收斂性，最常用到的是下面這個既簡單，而且用起來又非常方便的充分條件。

定理 2. (維爾斯脫拉斯判別法)。如果有這樣一個收斂的正項級數

$$a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots\tag{5}$$

存在，使得

$$|u_n(x)|\leqslant a_n\quad(n=1,2,\cdots;a\leqslant x\leqslant b),\tag{6}$$

則級數(1)在區間 (a,b) 上一致收斂。

證明. 根據 § 67 的定理 1，不管 $\varepsilon>0$ 多末小，對於充分大的 n，不等式

$$a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{n+p}<\varepsilon,$$

對於任意的自然數 p 都是成立的。但是這樣一來，根據不等式(6)，就有：

$$\left|\sum_{k=1}^{p}u_{n+k}(x)\right|\leqslant\sum_{k=1}^{p}|u_{n+k}(x)|<\varepsilon\quad(a\leqslant x\leqslant b),$$

這裏只要 n 充分大，p 則可以是任意一個自然數。於是，根據定理 1，我們就知道級數(1)在區間 (a,b) 上一致收斂，這就證明了定理 2。

關於 § 73 的習題，可以參看 Б. П. 捷米多維奇的習題集，第五章，習題 242，243，245，246，261，262，264，268，279，285，286。

§ 74. 函數級數的和的連續性

在我們以前研究數值級數時，一個帶主導性的想法是下面這樣一個問題：有限和的那些性質，對於無窮級數來說，仍能保持不變，換句話說，在什麼樣的程度下，我們可以像處理有限和一樣來處理無窮級數。很自然地，在函數級數的理論中我們也應該提出同樣的問題。

我們知道，有限個連續函數之和，永遠還是連續函數——無論我們所說的連續性是在一點或者是在一個區間上都一樣。是不是這個有限和的性質對於無窮級數仍能保持不變呢？如果級數

$$u_1(x)+u_2(x)+\cdots+u_n(x)+\cdots \tag{1}$$

的所有的項都在區間(a, b)上連續，又如果級數(1)在這個區間的每一點都收斂，則是否我們可以斷定這個級數的和在區間(a, b)上還是連續的呢？我們已經知道，一般來說，這是不對的。在§73中，我們已經討論過

$$u_1(x)=x, \quad u_n(x)=x^n-x^{n-1} \quad (n>1)$$

的一個級數的例子；這個例子說明了一個級數儘管它的各項都在區間$(0, 1)$上連續，而且它在區間$(0, 1)$的每一點都收斂，但是它的和卻等於

$$s(x)=\begin{cases}0 & (0\leqslant x<1)\\ 1 & (x=1),\end{cases}$$

也就是說，卻是一個不連續的函數。不過，我們也可以回想一下，我們原來造出這個例子的目的，是想得到一個非一致收斂的級數，而實際上我們也的確證明了這樣造成的級數在區間$(0, 1)$上不是一致收斂的。很自然地我們會想到：也許正就是這種收斂的不一致性造成了級數的和的不連續性，要是我們所造的級數是一致收斂的話，這種不連續的現象也許就不會發生了。這個猜想的確是不錯的，因為我們有：

定理 1. 如果在區間(a, b)上一致收斂的級數(1)的每一項都在

(a,b)上連續，則級數(1)的和 $s(x)$ 在區間(a,b)上也連續。

因為級數(1)的一切項 $u_n(x)$ 的連續性完全等價於這個級數的一切部分和 $s_n(x)$ 的連續性，所以定理 1 的意思也就等於說：如果序列 $s_1(x), s_2(x), \cdots, s_n(x), \cdots$ 的一切項都連續，又這個序列在區間 (a,b) 上一致趨向於極限函數 $s(x)$，則函數 $s(x)$ 也在這個區間上連續。

附註．我們所謂函數序列

$$f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x), \cdots$$

在區間 (a,b) 上一致趨向於(或一致收斂於)一個函數 $f(x)$，是說對於任意的 $\varepsilon>0$，都可以找到一個號碼 n_0，使得只要 $n\geqslant n_0$，就對於任意的 $a\leqslant x\leqslant b$，我們都有：

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon.$$

顯然級數(1)的一致收斂性等價於它的部分和所組成的序列 $s_1(x), s_2(x), \cdots, s_n(x), \cdots$ 的一致收斂性。

證明．假定 ε 是任意一個正數又 α 是區間 (a,b) 上的任意一點。因為級數(1)在這個區間上一致收斂，所以對於充分大的 n，我們有：

$$|s(x)-s_n(x)|<\frac{1}{3}\varepsilon \quad (a\leqslant x\leqslant b). \tag{2}$$

任意取定一個滿足這個不等式的數 n。因為函數 $s_n(x)$ 在點 α 連續，所以有這樣一個 $\delta>0$ 存在，使得只要 $|x-\alpha|<\delta$，就有：

$$|s_n(x)-s_n(\alpha)|<\frac{1}{3}\varepsilon, \tag{3}$$

但是

$$|s(x)-s(\alpha)|=|[s(x)-s_n(x)]+[s_n(x)-s_n(\alpha)]+[s_n(\alpha)-s(\alpha)]|\leqslant$$
$$\leqslant|s(x)-s_n(x)|+|s_n(x)-s_n(\alpha)|+|s_n(\alpha)-s(\alpha)|.$$

根據(2)式，不管 x 與 α 是區間(a,b)上的怎樣兩點上式右端的第一項與第三項都小於$\frac{1}{3}\varepsilon$；又根據(3)式，只要 $|x-\alpha|<\delta$，右端的第二項也小於$\frac{1}{3}\varepsilon$。因此，就在這個條件下，右端三項之中，每一項都小於$\frac{1}{3}\varepsilon$，從

而他們的和小於 ε；因此，我們已經得到：

$$|s(x)-s(\alpha)|<\varepsilon,$$

只要 $|x-\alpha|<\delta$。因爲 $\varepsilon>0$ 是任意的，所以函數 $s(x)$ 在點 α 連續；又因 α 是區間 (a,b) 上的任意一點，所以函數 $s(x)$ 在這個區間上連續，這就證明了定理 1。

因此，連續函數級數的一致收斂性就足以保證這個級數的和的連續性。事實上，在大多數的具體情況下，和的連續性就正是用這種方法——根據級數的一致收斂性——來證明的。但是我們也需要注意到，有時不一致收斂的連續函數級數也可以有連續的和，因此上述定理的逆命題是不正確的。我們現在舉一個例來說明它。我們選擇級數(1)的各項，使得

$$s_n(x)=x^n(1-x^n)\quad(n=1,2,\cdots);$$

顯然這只要令

$$u_1(x)=s_1(x)=x(1-x),$$

$$u_n(x)=s_n(x)-s_{n-1}(x)=x^n(1-x^n)-x^{n-1}(1-x^{n-1})\quad(n>1)$$

就行。因爲當 $0\leqslant x\leqslant 1$ 時，

$$0\leqslant s_n(x)<x^n,$$

所以當 $0\leqslant x<1$ 時，$s_n(x)\to 0\ (n\to\infty)$；又因爲對於任意的 n，都有 $s_n(1)=0$，所以也有 $s_n(1)\to 0(n\to\infty)$，因此，對於區間 $(0,1)$ 上的任何一點 x，$s_n(x)$ 都趨向於零。級數(1)的和恆等於零，當然連續。但是另一方面，當 $x=\sqrt[n]{\frac{1}{2}}$ 時，我們永遠有：

$$|r_n(x)|=s_n(x)=\frac{1}{4},$$

所以不管 n 多末大，當 $\varepsilon\leqslant\frac{1}{4}$ 時，不等式

$$|r_n(x)|<\varepsilon$$

不可能對於區間 $(0,1)$ 上所有的點都成立，因此，級數不是一致收斂

的。在這裏，如果把所發生的現象從明白醒目的圖形上來仔細地觀察一下，那會是很有益處的。在圖 48 中，我們畫出了，當 $n=1,2$ 與很大的 n 時，函數 $y=s_n(x)$ 的圖形，(讀者不難算出）這些函數中，每一個都有一個最大值 $\frac{1}{4}$，函數 $s_n(x)$ 在點 $x=\frac{1}{\sqrt[n]{2}}$ 達到這個最大值。因此，當 n 無限增大時，這個極大保持着它的高度

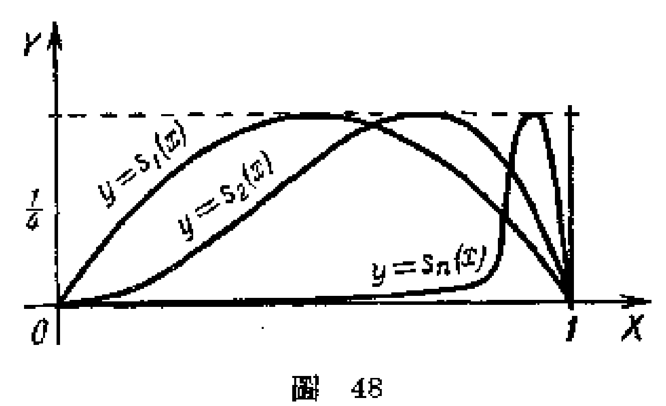


圖 48

不變，只是向右移動，逐漸逼近點 1。因此，一方面，不管我們把 x 這一點選得離 1 多麼近，當 n 充分大時，這個極大總會移到 x 的右邊去，於是在這一點 x，函數 $s_n(x)$ 隨 n 的增大而變小以至於趨向於零。但是，另一方面，不管 n 多麼大，也總可以找到一點 $(x=1/\sqrt[n]{2})$，在那裏 $s_n(x)=\frac{1}{4}$，也就是說，永遠可以找到一些點，在那裏函數 $s_n(x)$ 趨向於零的速度顯著地"落後"，因此我們就找不到這樣的 n，使得對於這個 n 來說，$s_n(x)$ 在區間 $(0,1)$ 的**每一點**，比如說，變得比 $\frac{1}{8}$ 還小。而這就表明了所造級數的不一致收斂性。

因此，連續函數級數的一致收斂性，一般說來，還不是級數的和也連續的必要條件；不難設想，應該還存在着一類非常重要的級數，對於這類級數的和的連續性來說，一致收斂是一個必要條件。這類級數就是正項級數（更一般地說，就是同號級數）。事實上，假定級數 (1) 在區間 (a,b) 上有連續的和 $s(x)$；又假定所有的 $u_n(x)$ 都在 (a,b) 上連續並且

$$u_n(x)\geqslant 0\quad (n=1,2,\cdots;a\leqslant x\leqslant b).$$

假定 ε 是任意一個正數；對於區間 (a,b) 的任意一點 x，我們可以找出這樣一個號碼 n 使得 $r_n=s(x)-s_n(x)<\varepsilon$；因爲函數 $r_n(x)$ 顯然是連續的，所以根據 § 23 的引理，這個在點 x 成立的不等式還應該在一個包

含點 x 在其內部（如果 $x=a$ 或 $x=b$，那就是用 x 作端點）的區間保持其正確性。對於區間(a,b)所有的點所作的所有這種區間的全體，顯然蓋住了區間 (a,b)。根據有限覆蓋定理（§ 18 引理 2），在這些區間中，可以找出一個有限組 $\Delta_1, \Delta_2, \cdots, \Delta_s$ 來，它們已經蓋住了區間(a,b)。根據這些覆蓋區間的作法，對於每一個區間 Δ_k $(1\leqslant k\leqslant s)$，必定有這樣一個號碼 n_k 存在，使得

$$r_{n_k}(x)<\varepsilon$$

對於區間 Δ_k 的一切點 x 都成立。但是從所有的 $u_n(x)$ 都不會是負的這件事實可以知道，$r_n(x)$ 只能隨 n 的增大而減小；因此，如果我們用 m 來記 s 個數 $n_1, n_2, \cdots, n_s$ 中最大的一個，則不等式

$$r_m(x)<\varepsilon$$

就應該對任意一個區間 Δ_k 的所有的點都成立，也就是說，對區間(a,b)的一切點都成立。由於 ε 的任意性，這就證明了級數(1)在區間 (a,b) 上的一致收斂性：

定理 2. 對於在區間 (a,b) 上各項連續的正項級數(1)來說，一致收斂性是級數和在區間 (a,b) 上連續的必要充分條件。

§ 75. 級數的逐項積分法與逐項微分法

在積分學的初步理論中，我們已經看到，有限個在區間 (a,b) 上可積的函數之和在這個區間上仍然是可積的，並且和的積分等於各項積分之和。是不是這個法則可以搬到無窮的函數級數上來呢？如果級數

$$u_1(x)+u_2(x)+\cdots+u_n(x)+\cdots \tag{1}$$

的每一項都在區間 (a,b) 上可積，又如果級數(1)在這個區間的每一點都收斂，那末是否就可以斷言，這個級數的和 $s(x)$ 也在區間(a,b) 上可積，並且

$$\int_a^b s(x)\,dx=\int_a^b u_1(x)\,dx+\int_a^b u_2(x)\,dx+\cdots+\int_a^b u_n(x)\,dx+\cdots \tag{2}$$

呢？

如果等式(2)是對的，我們就說級數(1)可以在區間(a,b)上逐項積分。顯然在這種情形下，如果用$s_n(x)$與$r_n(x)$來表示級數(1)的部分和與餘項，我們就有

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b s_n(x)dx=\int_a^b s(x)dx,\quad \lim_{n\to\infty}\int_a^b r_n(x)\,dx=0.$$

並且反過來說，從這兩個關係中的任何一個也都可以導出(2)式這個關係。

不難證明，函數級數的逐項積分並不是永遠可能的。我們今後爲簡單起見，永遠假定級數(1)的各項在區間(a,b)上連續，因爲即使就在這樣一個限制之下，所有可能發生的各種各樣不同的現象就已經完全暴露出來了。首先級數(1)的和$s(x)$有時候在區間(a,b)上是不可積的。我們來看下面的例子(在這個例子中我們一下子就把函數$s_n(x)$寫了出來，這是因爲級數(1)的項，如我們所知，是可以直接用$s_n(x)$來唯一確定的)，我們令

$$s_n(x)=\begin{cases} n^2x\left(0\leqslant x\leqslant\dfrac{1}{n}\right),\\[2ex] \dfrac{1}{x}\ \left(\dfrac{1}{n}\leqslant x\leqslant 1\right);\end{cases}$$

函數$y=s_n(x)$的圖形如圖49所示。對於任意一個$x>0$，只要$\dfrac{1}{n}\leqslant x$我們就有$s_n(x)=\dfrac{1}{x}$；因此$\lim\limits_{n\to\infty}s_n(x)=\dfrac{1}{x}$對任意的$x>0$都成立。但是如果$x=0$則對任意的$n$都有$s_n(0)=0$。因而我們有$\lim\limits_{n\to\infty}s_n(x)=0$。

因此，函數$s_n(x)$對於任意的$x(0\leqslant x\leqslant 1)$以

$$s(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}\ (0<x\leqslant 1)\\[2ex] 0\qquad (x=0)\end{cases}$$

爲極限；換句話說，級數(1)在區間(0,1)的每一點都收斂，而且它的和是函數 $s(x)$。部分和 $s_n(x)$ 是連續的，所以級數的各項 $u_n(x)$ 也是連續的，從而它們都在區間(0,1)上可積。但是函數 $s(x)$ 在這個區間上却不可積。事實上，如果可積的話，由於函數 $s(x)$ 是非負的，對於任意的 $\alpha(0<\alpha<1)$ 我們就會有：

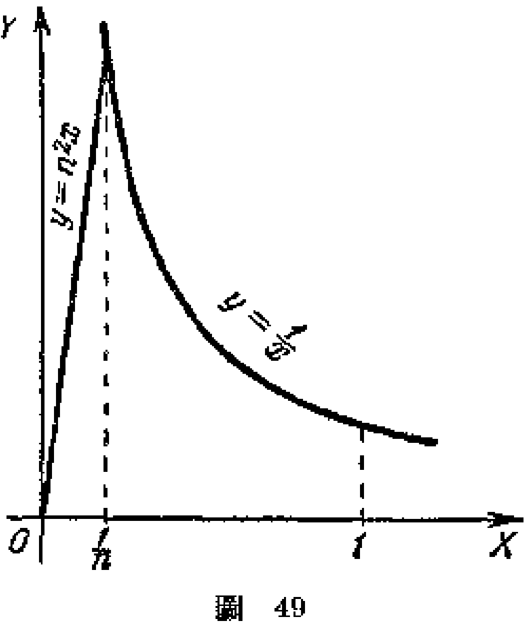


圖 49

$$\int_0^1 s(x)\,dx \geqslant \int_\alpha^1 s(x)\,dx = \int_\alpha^1 \frac{dx}{x} = \ln\frac{1}{\alpha};$$

但當 α 充分小時，$\ln\frac{1}{\alpha}$ 可以任意大，而這是一個矛盾。

另一方面，也有可能函數 $s(x)$ 是可積的，但是等式(2)右端的級數却是發散的。對於 $n\geqslant 2$ 我們這樣來規定函數 $s_n(x)$：當 $x>\frac{2}{n}$ 時我們令 $s_n(x)=0$，而在區間 $\left(0, \frac{2}{n}\right)$，$s_n(x)$ 的變化則如圖 50 所示。對於任意的 n 我們都有 $s_n(0)=0$；又如果 $0<x\leqslant 1$ 則當 $\frac{2}{n}\leqslant x$ 我們有 $s_n(x)=0$，因此 $\lim\limits_{n\to\infty} s_n(x)=s(x)=0$ 在區間(0,1)的每一點 x 都成立；換句話說，級數(1)在區間(0,1)的每一點收斂，而且它的和恆等於零。但是另一方面，積分

圖 50

$$\int_0^1 s_n(x)\,dx$$

等於第 50 圖中等腰三角形的面積，所以它的值等於 n；因此我們有（爲了一致起見，我們規定當 $0\leqslant x\leqslant 1$ 時 $s_1(x)=u_1(x)=0$）：

$$\int_0^1 s_n(x)\,dx=\sum_{k=1}^{n}\int_0^1 u_k(x)\,dx=n;$$

結果，當 $n\to\infty$ 時，這個和無限增大；因此 (2) 式右端的級數是發散的。

最後，還可能有這種情形發生，就是函數 $s(x)$ 是可積的，(2) 式右端的級數也是收斂的，但是等式(2)仍然不成立。要想得到這種例子，只要在前一個例子裏面（在圖 50 中）選定三角形的高爲 n 以代替 n^2，其他關於函數 $s_n(x)$ 的規定完全不變。於是跟前面一樣，我們還是有 $s(x)=0\,(0\leqslant x\leqslant 1)$，因而

$$\int_0^1 s(x)\,dx=0;$$

但是現在，

$$\int_0^1 s_n(x)\,dx=\sum_{k=1}^{n}\int_0^1 u_k(x)\,dx=1\quad(n=2,3,\cdots);$$

因此，等式(2)的右端等於 1，而左端却等於 0。

現在我們要證明，對於一致收斂的級數來說，以上所考慮的這些可能情形就都不會再發生了，一致收斂級數永遠可以逐項積分。

定理 1. 如果級數 (1) 所有的項都在區間 (a,b) 上連續，並且這個級數在 (a,b) 上一致收斂，則等式 (2) 成立。

證明. 由級數(1)的一致收斂性首先可以推出它的和 $s(x)$ 在 (a,b) 上連續，從而在 (a,b) 上可積。其次，不管 $\varepsilon>0$ 多麼小，對於充分大的 n，我們都有：

$$|r_n(x)|<\varepsilon\quad(a\leqslant x\leqslant b).$$

因此，對於充分大的 n，

$$\left|\int_a^b r_n(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |r_n(x)|\,dx \leqslant \varepsilon(b-a);$$

由此可見，

$$\int_a^b r_n(x)\,dx \to 0 \quad (n\to\infty),$$

我們以前說過，這就等價於關係式(2)。因此，定理 1 就證明了。

連續函數級數的一致收斂性，是這個級數能夠逐項積分的一個充分條件而不是必要條件。要說明這一點，我們回到 § 74 中考慮過的那個不一致收斂的級數：

$$s_n(x)=x^n-x^{2n},\ s(x)=0 \quad (0\leqslant x\leqslant 1).$$

現在

$$\int_0^1 s_n(x)\,dx=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{2n+1},\quad \int_0^1 s(x)\,dx=0,$$

因而

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 s_n(x)dx=\int_0^1 s(x)\,dx;$$

這個關係式，如我們所知，是等價於關係式(2)的；因此，即使級數的收斂不是一致的，它也還是有可能可以逐項積分。

最後，我們還要指出下面的事實，如果級數(1)的每一項都連續，又級數在區間(a, b)上一致收斂，則顯然在任意區間(a, x)，其中$a<x<b$，也一致收斂。因此，我們得到

$$\int_a^x s(y)\,dy=\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^x u_n(y)\,dy. \tag{3}$$

這個等式右端的級數的項都是區間(a, b)上的x的連續函數。假如把這個級數的餘項記作$R_n(x)$，我們顯然就有：

$$R_n(x)=\int_a^x [s(y)-s_n(y)]\,dy=\int_a^x r_n(y)\,dy;$$

假定 n 是這樣大,使得 $|r_n(y)|<\varepsilon\ (a\leqslant y\leqslant b)$; 於是對於 $a\leqslant x\leqslant b$

$$|R_n(x)|\leqslant\int_a^x |r_n(y)|\,dy\leqslant\varepsilon(x-a)\leqslant\varepsilon(b-a).$$

這就說明,級數(3)在區間(a,b)上一致收斂。因此,我們得到了下面的定理,可以看作是定理1的推廣。

定理 2. 如果級數(1)所有的項都在區間(a,b)上連續,又級數(1)在(a,b)上一致收斂,則關係式(3)對於區間 $a\leqslant x\leqslant b$ 一致地成立。

最後,我們來談函數級數逐項微分的問題。問題的提法現在對於我們已經很清楚了。有限個在某一點 x 可微的函數之和仍然在該點是可微的,並且和的導數等於各項導數之和。我們想知道,在什麼樣的條件下,這個法則可以移用到無窮的函數級數上來。

假定級數(1)在區間(a,b)的每一點都收斂,又假定它的各項在這個區間上都有連續的導數。再假定級數

$$u_1'(x)+u_2'(x)+\cdots+u_n'(x)+\cdots \tag{4}$$

在區間(a,b)上一致收斂。我們把級數(1)的和記作 $s(x)$,級數(4)的和記作 $t(x)$。於是根據定理2,對於 $a\leqslant x\leqslant b$,我們有:

$$\int_a^x t(y)\,dy=\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^x u_n'(y)\,dy=\sum_{n=1}^{\infty}[u_n(x)-u_n(a)]=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)-\sum_{n=1}^{\infty}u_n(a)=s(x)-s(a).$$

根據我們熟知的積分性質,這個等式的左端,對 x 是可微的,並且它的導數就等於 $t(x)$;因此我們就可以斷言,函數 $s(x)$ 是可微的,並且

$$s'(x)=t(x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n'(x)\quad(a\leqslant x\leqslant b),$$

這就是說，級數(1)在點 x 可以逐項微分。因此，我們已經證明了下列命題：

定理 3. 假定級數(1)在區間(a, b)的每一點都收斂，並且它的和等於 $s(x)$ $(a\leqslant x\leqslant b)$。則只要這個級數所有的項都在區間$(a, b)$上有連續導數，並且級數(4)在$(a, b)$上一致收斂，函數 $s(x)$ 就在區間(a, b)上有連續導數，並且

$$s'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n'(x)\quad(a\leqslant x\leqslant b),$$

換句話說，級數(1)在區間(a, b)的每一點都可以逐項微分。

因此，級數(1)可以逐項微分的條件，在這裏，不是級數(1)本身的一致收斂性而是由它的各項的導數所組成的級數(4)的一致收斂性。

定理 3 所建立的條件，照例是很便於應用到具體的級數問題上面去的；實際上在大多數情形下，級數的逐項可微性都是根據這個條件來建立的。值得注意的是，在定理 3 中並沒有假定級數的和 $s(x)$ 的可微性，它的可微性，是根據定理的前提證明出來的。

關於 § 75 的習題，讀者可以參看 Б. П. 捷米多維奇的習題集，第五章，習題 294，295，287。

第二十章　冪級數與多項式級數

§ 76. 冪級數的收斂區域

在數學分析裏所研究的多種多樣的函數級數中，理論上最簡單，應用上也最重要的一類級數是所謂冪級數，也就是具有下列形式

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots \tag{1}$$

(其中 $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n\cdots$ 都是實的常數)的這種級數。更一般地，我們常常把

$$a_0+a_1(x-a)+a_2(x-a)^2+\cdots+a_n(x-a)^n+\cdots$$

(其中 a 是一個實常數)這種形式的級數也稱爲冪級數。這類級數之所以簡單以及它之所以重要，首先是在於它所有的部分和 $s_n(x)$ 都是普通的多項式；因而只要級數(1)是收斂的，則它的和 $s(x)$，儘管一般說來是很複雜的函數，但是總可以用多項式來近似地表達，而且這種近似表達可以逼近到任何精確的程度，只要把 n 取得充分大，換句話說，只要多項式的次數取得足够高就行。

跟研究函數級數一樣，對冪級數 (1) 進行研究時，首先提出的問題也是它的收斂區域的問題，也就是當 x 取那些值時級數收斂，取那些值時級數發散的問題。在前一章中我們已經看到，對於某些函數級數來說，收斂區域可以是構造很複雜的集合；現在我們就要來證明，冪級數的收斂區域却永遠都具有很簡單的形狀，正是這一點使得我們研究這一類級數時進行起來大爲方便。

冪級數收斂區域的一般形狀是下述的重要性質的簡單推論。

定理 1. 如果級數(1)當 $x=\alpha$ 時收斂，則對於滿足 $|x|<|\alpha|$ 的任何 x 的值，級數(1)都絕對收斂。

證明. 由定理中關於級數

$$a_0+a_1\alpha+a_2\alpha^2+\cdots+a_n\alpha^n+\cdots$$

的收斂的假定知道，当 $n\to\infty$ 时，$a_n\alpha^n\to 0$；由此可見，一定有这样一个正数 c 存在，使得

$$|a_n\alpha^n|<c\quad(n=1,2,\cdots)$$

現在假定 $|x|<|\alpha|$，于是当 $n\geqslant 1$ 时

$$|a_nx^n|=|a_n\alpha^n|\cdot\left|\frac{x}{\alpha}\right|^n<c\left|\frac{x}{\alpha}\right|^n.$$

因为几何級数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{x}{\alpha}\right|^n$$

收斂，則根据 §68 中之定理 1，級数

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_nx^n|$$

也收斂，而这正表示級数(1)絕对收斂。定理于是証完。

定理 1 的內容的几何說明就是：如果級数(1)在数軸上的某一点 α 收斂，則在任何一个比 α 更接近 0 的点上級数 (1) 都絕对收斂。現在我們在定理 1 的指导之下来考虑冪級数的收斂区域应該是什么样的形狀。

1. 任何冪級数(1)都在 $x=0$ 处收斂，因为在这一点任何冪級数除首項外其他各項都等于零。因此，点 $x=0$ 屬于任何一个冪級数的收斂区域。但是是否可能發生这种情况：在任何一点 $x\neq 0$ 級数(1)都發散，或者說它的收斂区域是由唯一的一个点 $x=0$ 構成的呢？級数

$$1+x+2^2x^2+3^3x^3+\cdots+n^nx^n+\cdots$$

告訴我們，这种情形是可能發生的；事实上如果 $x\neq 0$，則当 $n>\dfrac{1}{|x|}$ 时，

$$|n^nx^n|=|nx|^n>1;$$

所以級数的第 n 項 $n^n x^n$ 当 $n\to\infty$ 時不趨向于 0，因而級数發散。因此，冪級数的收斂区域可以只由 $x=0$ 一点構成。

2. 跟第一种情形極端相反的情形是，級数(1)在任意一点 x 都收斂，換句話說，級数的收斂区域是整个的数軸；这种情形也是有的，例如級数

$$1+x+\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^3}{3^3}+\cdots+\frac{x^n}{n^n}+\cdots$$

就是这样；因为当 $n>2|x|$ 时我們有

$$|x|^n<\frac{n^n}{2^n},\quad \frac{|x|^n}{n^n}<\frac{1}{2^n},$$

所以对于任何 x，这个級数具有充分大的号碼 n 的一切項，就絕对值来說，都小于一个收斂的几何級数的对应項，因此，根据級数的比較原則，这就証明了給定的級数的收斂性。

3. 除前兩种情形外，剩下的第三种情形是：旣有那种使得級数(1)收斂的点 $x\neq 0$ 存在，同时也有使級数(1)發散的不为零的点存在。我們首先証明，在这种情形，級数(1)的收斂区域是一个有界集合。因为，假定 α 是級数(1)的任意一个發散点；于是根据定理 1 知道級数(1)在任何一个滿足 $|x|>|\alpha|$ 的点 x 都發散，这就說明級数(1)的任何一个收斂点都应該滿足不等式 $|x|\leqslant|\alpha|$。这就証明了收斂点集合的有界性。

我們把級数(1)的收斂点集合的上确界(我們剛才証明了这个集合有界，所以它一定有上确界)記作 r。我們肯定說：級数(1)当 $|x|<r$ 时絕对收斂，当 $|x|>r$ 时發散。根据 r 的定义第二个論断是显然的。要想証明第一个論断，我們任意取一个滿足 $|x|<r$ 的 x，然后令 $r-|x|=\lambda>0$。因为 r 是級数(1)的收斂点集合的上确界，所以一定可以找到一个收斂点 y，使得 $y>r-\lambda=|x|$。于是根据定理 1，就知道点 x 是級数(1)的一个絕对收斂点。这就是我們想要証明的。

因此，当級数（1）的收斂区域不止一个点 $x=0$，但也不能包含整个数軸上的点时，就永远都有这样一个正数 $r>0$ 存在，使得当 $|x|<r$ 时（即当 x 在区間 $(-r, r)$ 的内部时），級数（1）收斂，当 $|x|>r$ 时（即当 x 在上述区間的外部时）發散。

为了不排除前面考虑的兩种情形，最方便的是我們約定：在第一种情形，点 $x=0$ 算作是当 $r=0$ 时的区間 $(-r, +r)$，而在第二种情形，数軸算作是相当于 $r=+\infty$ 的区間。在我們采用了这个規定之后，以上得到的結果就可以無例外地总結如下：

定理 2. 对任何一个冪級数来說，都有这样一个数 $r(0\leqslant r\leqslant+\infty)$ 存在，使得当 $|x|<r$ 时級数絕对收斂，当 $|x|>r$ 时級数發散。

这个数 r 称为給定級数的收斂半徑，又区間 $(-r, r)$ 称为它的收斂区間，而問題是在于我們应該算作这个区間是开的还是閉的，这我們在稍后一些来考虑。

因此，我們已經看到，冪級数的收斂区域永远是一个以点 0 为中点之区間，在特別情形，这个区間可以縮成一点 $x=0$，也可以扩張成整个数軸。由此冪級数理論的一个基本問題就是要根据它的"系数" $a_n(n=1, 2, \cdots)$ 来确定它的收斂半徑。

近代科学已經一般地解决了这个問題，不过这里我們不可能来考虑这个一般的解决。我們只限于考虑一个特別情形，在实际上碰到的大多数問題，这个特別的解决已經够用了。

定理 3. 假定級数（1）的系数滿足

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\to l \quad (n\to\infty);$$

則

$$r=\begin{cases}\frac{1}{l}, & \text{如果 } 0<l<+\infty,\\ \infty, & \text{如果 } \quad l=0,\\ 0, & \text{如果 } \quad l=\infty.\end{cases}$$

証明. 假定 $0<l<+\infty$；于是当 $n\to\infty$ 时

$$\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right|=\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\cdot|x|\to l|x|; \tag{5}$$

当 $|x|<\frac{1}{l}$ 时，$l|x|<1$，根据 § 68 中的判别法 2（推論），級数(1)在点 x 絕对收斂。反过来，当 $|x|>\frac{1}{l}$ 时，$l|x|>1$，根据同一个判别法，在点 x 級数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n x^n|$ 發散；由此可見，$r=\frac{1}{l}$。

在 $l=0$ 的情形，关系(5)指出，当 $n\to\infty$ 时，对于任意的 x 都有：

$$\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right|\to 0;$$

因此，还是根据上述的那个判别法，对任意的 x，級数都收斂，所以 $r=+\infty$。

最后，在 $l=+\infty$ 的情形，对于任意的 $x\neq 0$ 我們都有：

$$\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right|\to\infty \quad (n\to\infty),$$

因此，对于任意的 $x\neq 0$ 級数(1)都發散，从而 $r=0$。

例 1. 考慮級数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}n^s x^n$，其中 s 是任意一个实常数。

因为当 $n\to\infty$ 时

$$\frac{(n+1)^s}{n^s}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^s\to 1,$$

所以根据定理 3，我們的級数的收斂半徑对于任意的 s 都等于 1。

例 2. 考虑級数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$。当 $n\geqslant 1$ 时

$$\frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}}=\frac{1}{n+1}\to 0 \quad (n\to\infty).$$

因此級数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ 的收斂半徑 $r=+\infty$，換句話說，这个級数对于任意的 x 都收斂。

我們应該算作收斂区間是开的还是閉的呢？換句話說，給定級数在点 $x=r$ 与 $x=-r$ 究竟是收斂还是發散呢？

考虑一些簡單的例子就可以看出，关于这个問題我們不能作出适用于任何情形的一般回答。有些級数在收斂区間的二个端点都收斂，于是收斂区域就是閉区間$(-r, r)$；另外有些級数当 $x=r$ 与 $x=-r$ 时都發散，因此这种級数的收斂区域就是开区間$(-r, r)$；最后，还有这种級数存在，它們在二个端点之一收斂，而在另一个端点上則發散，在这种情形，收斂区域就是一个“半开”区間。

对上面所說的三种情形分别举例如下：

例 3. 級数

$$1+\frac{x}{1^2}+\frac{x^2}{2^2}+\cdots+\frac{x^n}{n^2}+\cdots$$

由例 1 知收斂半徑为 1，而显然在收斂区間的二个端点上皆絕对收斂。

例 4. 級数

$$1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2}+\cdots+\frac{x^n}{n}+\cdots$$

由例 1 知收斂半徑也为 1。当 $x=-1$，我們得到萊布尼茲級数

$$1-\frac{1}{1}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots$$

这我們已經知道是条件收斂的。当 $x=1$，我們得到(發散的)調和級数。因此，給定級数的收斂区域是半开區間($-1\leqslant x<1$)。

例 5. 几何級数

$$1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots$$

具有收斂半徑 1，而在收斂区間的二个端点上發散。

进一步的練習可以参看 Б. П. 捷米多維奇的習題集，第五章習題 125, 126, 132。

§ 77. 一致收斂性及其推論

在前一章中，我們已經看到，对于建立函数級数的各种性質来說，一致收斂性具有多么大的价值。現在在我們弄清楚了冪級数的收斂区域的一般形式之后，很自然地我們轉来討論关于一致收斂性的問題。

我們能否断定任何一个冪級数

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots \tag{1}$$

在开区間($-r, r$)上是一致收斂的呢(其中 r 是級数的收斂半徑)？几何級数的例子已經指出这个論断一般說来是不正确的。事实上，对級数

$$1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots \tag{2}$$

来說，它的收斂区間是开区間($-1, +1$)；級数的余項

$$r_n(x)=\sum_{k=n+1}^{\infty} x^k=\frac{x^{n+1}}{1-x}$$

当 $n\to\infty$ 时，趋向于零，这对于满足 $-1<x<+1$ 的任何 x 都对；但是不管 n 多大，当 $x\to 1$ 时都有 $r_n(x)\to\infty$，所以如果 x 被取得充分接近 1 时，不管 n 等于多少，$r_n(x)$ 都可以任意地大；因此，在开区間($-1, 1$)上級数(2)的收斂性不是一致的。

但是，在任何一个其端点在收斂区間内部的区間上，冪級数是一致收斂的，这就是下述的

定理 1. 如果級数(1)的收斂半徑等于 r，又有 r' 滿足 $0<r'<r$，則級数(1)在区間 $(-r', r')$ 上一致收斂。

証明. 因为 $r'<r$，所以級数(1)在点 $x=r'$ 絕对收斂，即級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| r'^n$$

收斂。但是当 $|x|\leqslant r'$ 时，我們有：

$$|a_n x^n| \leqslant |a_n| r'^n \quad (n=1, 2, \cdots),$$

因此根据 § 73 的定理 2，級数(1)在区間 $|x|\leqslant r'$ 上一致收斂，这就証明了定理 1。

这个定理在冪級数的理論与应用上有很多重要的推論。首先，从它可以推出

定理 2. 冪級数的和在收斂区間的每一个內点处都連續。

事实上，收斂区間的每一个內点都可以用一个連端点都在收斂区間内部的区間把它蓋起来。根据定理 1，級数在这个区間上是一致收斂的，再根据 § 74 的定理 1，級数的和在这个区間上連續，当然在我們所考虑的那个点处也連續。

其次，因为一致收斂的連續函数級数永远可以逐項积分(§ 75 的定理 1)，所以从定理 1 可以推出

定理 3. 对于級数(1)的收斂区間的任何一个內点 x，我們都有：

$$\int_0^x s(t)\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^x t^n\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1},$$

其中 $s(x)$ 代表級数(1)的和。

在这里，后面这个級数(根据 §75 的定理 2)在任何一个使級数(1)一致收斂的区間上都一致收斂，因此，这个級数在任何一个全部包含在級数(1)的收斂区間內部的区間上，都一致收斂。

最后，下面我們要証明的这个关于冪級数可以逐項微分的定理，对于冪級数的理論及其全部应用，具有根本的意义。

定理 4. 冪級数 (1) 的和 $s(x)$ 在这个級数的收斂区間 $(-r, +r)$ 的任何一个內点上都可微。逐項微分級数(1)得到的級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}, \tag{3}$$

具有同样的收斂半徑 r，并且这个級数的和就等于 $s'(x)$ $(|x|<r)$。

証明 假定 ρ 与 ρ' 滿足不等式 $0<\rho<\rho'<r$。由于 §76 的例 1 $(s=1)$ 級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\lambda^n$$

当 $0\leqslant\lambda<1$ 是收斂的，則若設

$$\lambda=\frac{\rho}{\rho'},$$

我們有

$$n\left(\frac{\rho}{\rho'}\right)^n\to 0,$$

因而，一定可以找到这样一个与 n 無关的正数 $c>0$，使得

$$n\left(\frac{\rho}{\rho'}\right)^n<c \quad (n=1, 2, \cdots).$$

知道这一点以后，我們来看

$$n|a_n|\rho^{n-1}=\frac{1}{\rho}\,n\left(\frac{\rho}{\rho'}\right)^n|a_n|\rho'^n<\frac{c}{\rho}|a_n|\rho'^n;$$

因为 $\rho'<r$，所以級数

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|\rho'^n$$

收斂，但是这样一来，上面那个不等式就告訴我們級数(3)当 $x=\rho$ 时絕对收斂。但因为 ρ 可以取得来任意接近于 r，所以級数 (3) 的收斂半徑 R 不小于 r。因此根据定理 1 知道，級数(3)在任何一个区間 $-\rho\leqslant x\leqslant\rho$ 上一致收斂，只要 $0<\rho<r$。但是在这种情形下，§ 75 的一般定理 3 使我們能够断言，当 $-r<x<r$ 时函数 $s(x)$ 具有导数，并且这个导数就等于級数(3)的和。要完成定理 4 的証明，只剩下要証明 $R=r$ 了。因为級数 (1) 是級数 (3) 由 0 到 x 逐項积分的結果，所以根据定理 3, 級数(1)应該在 $-R<x<R$ 上收斂；由此可見 $r\geqslant R$, 但前面我們已經証明了 $R\geqslant r$, 所以 $R=r$, 这就証完了定理 4。

这个定理拥有一些重要而深刻的推論。首先，它揭露出一个具有重大意义的事实，那就是：冪級数的和 $s(x)$ 在收斂区間的内部不仅永远是連續的而且永远是可微的。因为函数 $s'(x)$ 是一个具有同样收斂区間 $(-r, +r)$ 的級数的和，所以对于这个函数我們又可以应用定理 4。于是我們知道，函数 $s(x)$ 的二級导数 $s''(x)$ 在 $(-r, +r)$ 的每一个内点也都存在，并且就等于逐項微分級数(1)兩次所得到的級数的和。显然，这个推理可以無限制地繼續下去，从而我們得到下述的一般結論：

定理 5. 如果級數(1)有收斂半徑 r, 則它的和 $s(x)$ 在區間 $(-r, +r)$ 的任何一個內點都有一切級的導數，並且函數 $s^{(n)}(x)$ $(n=1,2,\cdots)$ 就是逐項微分級數(1) n 次所得到的那個級數（它的收斂半徑也同樣是 r）的和：

$$s^{(n)}(x)=\sum_{k=n}^{\infty}k(k-1)\cdots(k-n+1)a_k x^{k-n}\quad(-r<x<+r)\qquad(4)$$

§ 77 的練習可以參看 Б. П. 捷米多維奇的習題集，第五章，習題 191,192,196,200.

§ 78. 函數的冪級數展開式

到現在為止，我們所研究的對象是一個給出來的冪級數；我們確定了它的收斂區域，並且研究了它的和的性質。但是，在大多數的實際應用中，我們所碰到的正好是相反的問題，換句話說，給定的是某一個函數 $s(x)$，我們首先要想知道的，就是這個函數是否在一個給定的區間上可以"展開成冪級數"。如果可以這樣展開的話，我們又應該怎麼樣更進一步來求出這個級數的係數，從而確定它的收斂半徑。我們在本節中要講的就是這些問題。

首先，§ 77 的定理 5 指出，只有當函數 $s(x)$ 在給定的區間的每一點上都有一切級的導數存在時，才能談到把這個函數展開成冪級數的問題（這裏給定的區間可以事先假定它是 $(-r, +r)$ $r>0$ 的形式）。當然，這就使得可以表成冪級數的這一類函數是比較狹窄的。不過無論如何，我們應該注意，全部初等函數都基本上能夠滿足這個要求，從而在實際上這些函數並不是非常特殊。現在我們假定函數 $s(x)$ 滿足這個要求，對於任何 $n\geqslant 0$ 以及任何 x $(-r<x<+r)$，$s^{(n)}(x)$ 都存在 $(s^{(0)}(x)=s(x))$。如果 $s(x)$ 可以展開成冪級數

$$s(x)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k x^k,\qquad(1)$$

則我們已經知道，對於函數 $s^{(n)}(x)$ $(n=0,1,2,\cdots)$ § 77 中的關係式(4)成立。特別說來，當 $x=0$ 時，這個關係式就給出：

$$s^{(n)}(0)=n!\,a_n \qquad (n=0,1,2,\cdots),$$

$$a_n=\frac{s^{(n)}(0)}{n!} \qquad (n=0,1,2,\cdots) \tag{2}$$

因此，以 $s(x)$ 作爲它的和的冪級數的係數 a_n，可以通過這個函數本身用(2)唯一地確定出來。

這個結果具有重要的原理上與實踐上的意義。從理論上來看，這個結果指出了，對於每一個函數 $s(x)$ 來說，只可能存在不多於一個的冪級數，使它的和在某一個區間上就等於 $s(x)$，換句話說，在某一個區間上收斂的兩個不同的冪級數永遠在這個區間上有不同的和。從實踐方面來看，這個結果使得我們計算表達函數 $s(x)$ 的冪級數的係數時，既容易而且又直接，事實上除了要求出這個函數在點 $x=0$ 的一切可能的導數之外，就不再要求任何別的東西了。

因此，只要函數 $s(x)$ 可以展開成級數(1)，這個級數就一定具有下列形式

$$s(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{s^{(k)}(0)}{k!}x^k, \tag{3}$$

對於一個給定的函數 $s(x)$ 所寫出的級數(3)(稱爲這個函數的馬克洛林級數)與它的收斂區域無關，也跟它的和是否就等於 $s(x)$ 沒有關係。因此，任何一個在 $x=0$ 具有一切級的導數的函數，都有馬克洛林級數；當然，這還並沒有能解決掉關於把函數 $s(x)$ 展開成冪級數的問題，因爲 1)級數(3)在任何一點 $x\neq0$ 都可能是發散的，2)即使級數(3)在點 $x\neq0$ 收斂，它的和也還有可能不等於 $s(x)$。事實上到現在爲止，我們所已經知道的全部東西只是：如果函數 $s(x)$ 可以展開成冪級數，則這個冪級數就是它的馬克洛林級數。

儘管如此，但這個結果却是很重要的。直到得出這個結論之前，我

們可以說，根本沒有接觸到把函數 $s(x)$ 展開成冪級數的問題，因爲關於這種可能展成的級數的係數，我們什麼都不知道。而現在，我們的問題就變成了要來研究一個確定的具體給定的級數(3)，究竟它的收斂區域是什麼，以及在這個區域上它的和是否就等於函數 $s(x)$。

馬克洛林級數的部分和 $s_n(x)$，在第九章中，我們就已經碰到過了，跟那裏一樣，我們關心的是要估計差數 $s(x)-s_n(x)$ 的值。不過，我們現在提出的問題跟從前的問題不同。在第九章中，我們還沒有無窮級數的概念；我們有興趣的首先是對於某一個常數 n 以及充分小的 x，差數 $s(x)-s_n(x)$ 的值究竟有多大，爲此，我們曾經找出了我們稱作馬克洛林公式的"餘項" $s(x)-s_n(x)=r_n(x)$ 的各種特殊形式。現在對我們來說，首要的問題是級數(3)的收斂於函數 $s(x)$ 的問題，換句話說，要來估計這同一個餘項 $r_n(x)$ 對於給定的 x，當 $n\to\infty$ 時的值。很明顯，在第九章中建立起來的餘項的那些特殊形式，無疑地可以應用來解決現在的新問題。我們在下面就會看到很多這種例子。現在我們再一次強調，要解決函數 $s(x)$ 能否展開成冪級數的問題，不僅僅我們不能夠滿足於函數具有任何級的導數，甚至於就是知道了馬克洛林級數收斂(有時候它可能非常簡單)也還是不够的，這就迫使我們不得不研究差數

$$r_n(x)=s(x)-\left[s(0)+\frac{s'(0)}{1!}x+\frac{s''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{s^{(n)}(0)}{n!}x^n\right]$$

當 $n\to\infty$ 時的變化狀態。實際上，我們可以證明，有這種由函數 $s(x)$ 產生的馬克洛林級數，它雖然收斂，但它的和却不等於 $s(x)$。要證實這一點，我們回想一下 §41 中考慮過的函數

$$\varphi(x)=\begin{cases} e^{-1/x^2}, & (x\neq 0), \\ 0\quad, & (x=0), \end{cases}$$

這個函數有 $\varphi^{(n)}(0)=0$ $(n=0,1,2,\cdots)$。如果函數 $s(x)$ 可以展開成冪級數(1)(我們知道，這時級數(1)必然就是它自己的馬克洛林級數)，

則函數

$$s^*(x)=s(x)+\alpha\varphi(x),$$

其中 α 是任意一個實常數，顯然具有跟函數 $s(x)$ 完全相同的馬克洛林級數；但是根據假設，這個級數的和等於 $s(x)$，也就是說不同於 $s^*(x)$（只要 $\alpha\neq0$）。前面我們已經知道，一個給定的函數展開成的冪級數是唯一的（就是它的馬克洛林級數）；現在我們又看到了，反過來，同一個冪級數却可以是無窮多個彼此不同的函數的馬克洛林級數。如果級數的和等於這些函數之一，則對這些函數中的任何其他一個函數 $f(x)$ 來說，它的馬克洛林級數都是收斂的，但它的和却不等於 $f(x)$。

最後，我們回想一下在本章一開始就談到的具有下列形式的級數

$$a_0+a_1(x-a)+a_2(x-a)^2+\cdots+a_n(x-a)^n+\cdots \tag{4}$$

其中 a 是一個實常數；變量替換 $x=a+y$ 把這個級數變成最簡單形式的冪級數

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_ny^n;$$

因此，我們以上所建立的全部關於冪級數的性質都可以稍加改變之後就搬到具有形式(4)的這種級數上來。級數(4)的收斂區域永遠是某一個閉的，開的或半開的區間 $(a-r, a+r)$ $(0\leqslant r\leqslant+\infty)$。如果 $s(x)$ 是級數 (4) 的和，則對於任意的 $n\geqslant0$，以及滿足 $a-r<x<a+r$ 的任何 x，$s^{(n)}(x)$ 都存在，並且

$$a_n=\frac{s^{(n)}(a)}{n!}\qquad(n=0, 1, 2, \cdots),$$

所以級數 (4) 是函數 $s(x)$ 的戴勞級數：

$$s(x)=s(a)+\frac{s'(a)}{1!}(x-a)+\frac{s''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{s^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\cdots$$

現在，我們轉到某些重要的初等函數展成冪級數的問題上來。很多時候，這個展開的可能性可以利用下述這個一般命題來證明。

定理 1. 如果有這樣一個正數 C 存在，使得

$$|s^{(n)}(x)|<C, \ (-r\leqslant x\leqslant +r, n=0, 1, 2\cdots).$$

則函數 $s(x)$ 在區間 $-r\leqslant x\leqslant +r$ 上可以展開成冪級數。

證明. 我們在 § 39 中已經知道，馬克洛林級數的餘項可以表成下列形式：

$$r_n(x)=\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}s^{(n+1)}(\theta x)\quad (0<\theta<1)$$

於是，當 $-r\leqslant x\leqslant +r$ 時

$$|r_n(x)|\leqslant\frac{Cr^{n+1}}{(n+1)!}$$

但是對於任何 $r>0$ 我們都有 $\frac{r^n}{n!}\to 0(n\to\infty)$；這一點可以立刻從級數

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{r^n}{n!}$$

的收斂性推出(§ 76 例 5)。因此，當 $-r\leqslant x\leqslant +r$ 時

$$r_n(x)\to 0\qquad (n\to\infty),$$

因而，

$$s(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{s^{(n)}(0)}{n!}x^n\qquad (-r\leqslant x\leqslant +r),$$

這就證明了定理 1。

對於函數 $s(x)=\sin x$ 與 $s(x)=\cos x$ 我們有：

$$|s^{(n)}(x)|\leqslant 1\quad (-\infty<x<+\infty, n=0, 1, 2, \cdots);$$

所以，這兩個函數都可以展開成在整個數軸上收斂的冪級數。

對於函數 $s(x)=e^x$，在任意一個區間 $-r\leqslant x\leqslant +r$ 我們都有

$$|s^{(n)}(x)|=e^x\leqslant e^r\quad (n=0, 1, 2, \cdots),$$

因此，函數 e^x 當 $-r\leqslant x\leqslant +r$ 時可以展開成冪級數，但因爲數 $r>0$ 是任意的，所以在整個數軸上函數 e^x 都可以展開成冪級數。

在 §39 中我們已經知道函數 $\sin x, \cos x, e^x$ 的馬克洛林級數的係數了，因此現在我們可以直接寫出：

$$\sin x=\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots,$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots,$$

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots.$$

$$(-\infty<x<+\infty)$$

對於函數 $s(x)=\frac{1}{1+x}$，當 $x>-1$ 時我們有：

$$s^{(n)}(x)=\frac{n!}{(1+x)^{n+1}}\to\infty \qquad (n\to\infty)$$

所以這裏不能應用定理 1。但是，我們知道，$s(x)$ 的馬克洛林級數

$$1-x+x^2-x^3+\cdots$$

的收斂半徑等於 1，並且當 $|x|<1$ 時它的和等於 $s(x)$。因爲，當 $x>-1$ 時

$$\int_0^x \frac{du}{1+u}=\ln(1+x),$$

所以根據 §77 的定理 3，當 $-1<x<1$ 時，我們有：

$$\ln(1+x)=\int_0^x\frac{du}{1+u}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_0^x u^n\,du=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}=$$

$$=\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\cdots;$$

這個級數的收斂半徑還是等於 1（參看 §76 的例 4）；因此，函數 $\ln(1+x)$ 在區間 $(-1,+1)$ 上可以展開成冪級數。完全一樣，逐項積分收斂半徑等於 1 的級數

$$\frac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$$

就可以導出下列展開式:

$$\operatorname{arc\,tg} x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}=\frac{x}{1}-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots,$$

這個級數也同樣只是在區間$(-1,+1)$上收斂。

我們得到函數$\ln(1+x)$與$\operatorname{arc\,tg} x$的冪級數展開式的辦法是完全一樣的,並且這兩個級數都只是在區間$(-1,+1)$上收斂。然而,在它們之間却有着一個很本質的不同。那就是函數$\ln(1+x)$的展開式不可能延展到區間$(-1,+1)$的限度之外去,這一點其實很自然,因為當$x\to-1$時,函數$\ln(1+x)\to-\infty$,而當$x\leqslant-1$時,一般說來$\ln(1+x)$不再有意義。但反過來,函數$\operatorname{arc\,tg} x$却確定在整個數軸上,並且在整個數軸上都具有一切級的導數,——但是雖然如此,對於函數$\operatorname{arc\,tg} x$來說,還是只有在區間$(-1,+1)$的限度內才可以展開成馬克洛林級數。

最後,我們來考慮函數$s(x)=(1+x)^\alpha$(其中α是任意一個實常數)展開成冪級數的問題。我們有:

$$s^{(n)}(0)=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1),$$

這就給出函數$s_n(x)$的馬克洛林級數的係數的表達式

$$a_n=\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}\qquad(n=0,1,2,\cdots),$$

如果α等於零或者任何一個自然數,則a_n從某一個號碼起全部等於零,從而我們得到的馬克洛林級數就是牛頓的二項式公式。當α是任何一個其他的數值時,係數a_n全都不等於零,從而我們得到的就是一個無窮級數。很明顯,下面我們不妨只考慮後面這種情形。

因為

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\left|\frac{\alpha-n}{n+1}\right|\to1\qquad(n\to\infty)$$

所以根據 § 76 定理 3，函數 $s(x)$ 的馬克洛林級數的收斂半徑等於 1。因此在區間$(-1, +1)$的外面，這個函数不能够展成冪級數。現在我們來證明，在這個區間的內部，這樣展開的確是可以的，換句話說，要證明當 $|x|<1$ 時

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n=(1+x)^\alpha,$$

爲此，我們利用在 § 39 中求出的馬克洛林級數的下列形式的餘項：

$$r_n(x)=\frac{(1-\theta)^n x^{n+1}}{n!}s^{(n+1)}(\theta x)$$

其中 $0<\theta<1$，在我們現在的情形，

$$s^{(n+1)}(x)=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)(1+x)^{\alpha-n-1}$$

因而，

$$r_n(x)=\frac{(1-\theta)^n x^{n+1}}{n!}\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)(1+\theta x)^{\alpha-n-1}=$$

$$=\frac{(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-1-n+1)}{n!}x^n\cdot\alpha x(1+\theta x)^{\alpha-1}\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n.$$

因爲 $x>-1$，所以 $0<1-\theta<1+\theta x$，從而

$$0<\frac{1-\theta}{1+\theta x}<1;$$

其次在表達式 $\alpha x(1+\theta x)^{\alpha-1}$ 中只有 θ 與 n 有關；但因爲永遠有 $0<\theta<1$，所以 $|\alpha x(1+\theta x)^{\alpha-1}|$ 永遠包含在與 n 無關的正數

$$|\alpha x|(1+|x|)^{\alpha-1} \text{ 與 } |\alpha x|(1-|x|)^{\alpha-1}$$

之間；因此，如果把這兩個數中大的一個記作 k，則對於任何一個 n 我們都有：

$$|\alpha x(1+\theta x)^{\alpha-1}|\leqslant k.$$

因此，我們得到了如下的估計值

$$|r_n(x)|\leqslant k\left|\frac{(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-1-n+1)}{n!}x^n\right|;$$

這個不等式的右端就是函數 $(1+x)^{\alpha-1}$ 的馬克洛林級數的第 n 項的絕對值乘上 k。但是我們前面已經證明了這個級數（不管指數 α 等於多少），當 $|x|<1$ 時都是收斂的；因此，這個級數的第 n 項當 $n\to\infty$ 時應該趨向於零，因此我們知道

$$r_n(x)\to 0 \quad (n\to\infty),$$

而這就是我們所要證明的。

在這一節的結尾，我們再對照一下某些重要的超越函數的馬克洛林展開式（縮寫的形式）：

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} \qquad (-\infty<x<+\infty).$$

$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad (-\infty<x<+\infty).$$

$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} \qquad (-\infty<x<+\infty).$$

$$\ln(1+x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1} \qquad (-1<x\leqslant 1)^{*)}.$$

$$\operatorname{arc\,tg} x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1} \qquad (-1\leqslant x\leqslant 1)^{*)}.$$

$$(1+x)^{\alpha}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n \qquad (-1<x<1)^{*)}.$$

這些展開式在應用時常常要碰到，因此我們必須像記住導數表或

---

* 這裏用星號標出的級數在收斂區間的端點上的性質，可以通過更詳細的討論來得到，我們就不作這種討論了。

者簡單函數的原函數表一樣地牢牢記住它們。

§78 的練習可以參看 Б. П. 捷米多維奇的習題集，第五章，習題 140—143,149—154,163,169,171,173,178,187,189.

§79. 多項式級數

我們已經說過，從實踐方面來說，把函數展開成冪級數的主要目的之一就是用多項式來逼近函數。事實上，如果某一個函數 $f(x)$ 可以展開成一個在區間 (a, b) 上一致收斂於 $f(x)$ 的冪級數，則不管 $\varepsilon>0$ 多麼小，只要 n 充分大，我們都有

$$|f(x)-s_n(x)|<\varepsilon \quad (a\leqslant x\leqslant b),$$

其中 $s_n(x)$ 是冪級數的部分和，因而是一個多項式。在這裏，我們必需注意，冪級數的理論不僅使我們能够在原則上建立起用多項式來逼近那些可以用多項式來逼近的函數的可能性，同時還使得我們可以在實際上用函數 $f(x)$ 及其導數在 $x=0$ 的值來表達多項式的係數，從而把這個多項式求出來。

因此，如果函數可以展開成冪級數的性格，能够保證可以用足够高次的多項式來逼近函數到任意精確的程度，則它的反命題是否也正確就是一個值得了解的事情。我們應該知道，能够展開成冪級數的一類函數只是比較狹窄的一類函數；比方說，就要求這種函數具有一切級的導數，而且甚至於這樣一個很受約束的條件也還不是充分的。如果說只有可以展開成冪級數的那些函數才能够用多項式來一致逼近到任意精確程度的話，那麼這種逼近的可能性也就大大地受到限制了。

我們同意這樣說，函數 $f(x)$ 在區間 (a, b) 上可以用多項式來一致逼近，如果對於無論多麼小的 $\varepsilon>0$，都可以找到這樣一個多項式 $P(x)$，使得

$$|f(x)-P(x)|<\varepsilon \quad (a\leqslant x\leqslant b).$$

我們已經知道，一個可以展開成冪級數的函數，在任何一個完全包

含在這個級數的收斂區間內部的區間上，都可以用多項式來一致地逼近。然而冪級數只是下列這種更一般形式的，以任意多項式 $P_n(x)$ 作爲項的級數

$$\sum_{n=1}^{\infty} P_n(x) \tag{1}$$

的一個特殊情形。假定級數(1)在區間(a, b)上一致收斂，我們把它的和記作$f(x)$，部分和記作$s_n(x)$。根據一致收斂性的定義，對於任意的$\varepsilon>0$，我們都可以找到這樣一個 n，使得

$$|f(x)-s_n(x)|<\varepsilon \quad (a\leqslant x\leqslant b);$$

因爲$s_n(x)$是有限個多項式之和，所以仍然是一個多項式，這就說明函數$f(x)$在區間(a, b)上可以用多項式來一致逼近。因此，在一個區間上能夠展開成一致收斂的多項式級數的函數，在這個區間上就可以用多項式來一致逼近。並且不難看出，這個論斷反過來還是正確的。事實上，假定函數$f(x)$在區間(a, b)上可以用多項式來一致逼近。於是對於任意一個自然數n，都可以找到一個多項式$Q_n(x)$，使得

$$|f(x)-Q_n(x)|<\frac{1}{n} \quad (a\leqslant x\leqslant b). \tag{2}$$

我們令

$$P_1(x)=Q_1(x), \ P_n(x)=Q_n(x)-Q_{n-1}(x) \quad (n>1);$$

於是級數

$$\sum_{n=1}^{\infty} P_n(x)$$

的部分和就是多項式$Q_n(x)$，從而不等式(2)指出，這個級數在區間(a, b)上一致收斂，並且它的和就是函數$f(x)$。

因此，函數$f(x)$在區間(a, b)上可以用多項式來一致逼近，完全等價於函數$f(x)$在這個區間上可以展開成一個一致收斂的多項式級數。

我們今後的任務就在於要來找出什麼樣的函數才能這樣展開。

首先，很明顯，這種函數應該在區間(a, b)上連續。事實上，因爲所有的多項式都連續，所以在區間(a, b)上一致收斂的多項式級數的和，根據 § 74 的定理 1，在這個區間上也應該連續。前一世紀的後半葉，德國數學家維爾斯脫拉斯發現了數學分析的一個最基本的事實，它證明了，反過來，任何一個在區間(a, b)上連續的函數，都可以在這個區間上用多項式來一致逼近（或者，另外一個說法，可以展開成一致收斂的多項式級數）。因此，從冪級數轉到更一般的多項式級數時，我們就立刻把可以展開成這種級數的函數類大大地放寬了；如果在以前我們曾經不得不要求函數具有一切級的導數，那麼現在對我們來說，甚至於就是假定一級導數存在都是不必要的了。

維爾斯脫拉斯定理在理論上與實踐上的意義是這樣重大，以致隨着它的發現，陸續地提出了許多不同的證明。這些證明，可以分作兩類：一類要用到一些特殊的解析工具的性質，另一類則僅僅基於一般特性的考慮。這兩類證明都非常值得重視，因爲它們所包含的概念可以應用到很多其他的分析問題上去。下一節中，我們要講一個最簡單最優美的第一類的證明（這個證明屬於 C. H. 別恩斯坦院士）。

§ 80. 維爾斯脫拉斯定理

定理. 在區間(a, b)上連續的函數$f(x)$可以在這個區間上用多項式來一致逼近。

證明 1. 這個基本定理的證明，建立在某種特別的解析工具的基礎上，因此要想完成這整個的證明，我們有必要先來建立起這個工具的某些特性。所以，我們現在先從證明一個輔助的具有初等代數性質的不等式開始。

引理 對於任何一個自然數n以及任意一個x，我們都有不等式❶

❶ 這裏以及下面，我們都算作當$x=0, k=0$時$x^k=1$，因而同樣當$x=1, k=n$時我們令$(1-x)^{n-k}=1$。數C_n^k是通常組合記法中的二項式係數。

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k (k-nx)^2 x^k (1-x)^{n-k} \leqslant \frac{n}{4}.$$

證明. 牛頓的二項式公式給出關於 z 的下列恆等式:

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k z^k = (1+z)^n; \tag{1}$$

對 z 進行微分再乘上一個 z, 就得到

$$\sum_{k=0}^{n} k C_n^k z^k = nz(1+z)^{n-1}; \tag{2}$$

再重覆一次同樣的運算,得出:

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 C_n^k z^k = nz(1+z)^{n-1} + n(n-1)z^2(1+z)^{n-2}$$

$$= nz(1+z)^{n-2}\{1+z+(n-1)z\} =$$

$$= nz(1+nz)(1+z)^{n-2}; \tag{3}$$

在關係式(1),(2)與(3)中,令

$$z = \frac{x}{1-x},$$

然後乘上$(1-x)^n$, 當 $x \neq 1$ 時,就得到

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = 1, \tag{4}$$

$$\sum_{k=0}^{n} k C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = nx, \tag{5}$$

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = nx(1-x+nx), \tag{6}$$

另一方面直接驗證就知道，當 $x=1$ 時等式 (4)，(5)，(6) 也是正確的。

現在我們把 (4) 式乘上 n^2x^2，(5)式乘上 $-2nx$，然後把它們與(6)式逐項一起相加，這就得到：

$$\sum_{k=0}^{n}(n^2x^2-2nxk+k^2)C_n^k x^k(1-x)^{n-k}=$$
$$=n^2x^2-2n^2x^2+nx(1-x+nx),$$

或即

$$\sum_{k=0}^{n}(k-nx)^2C_n^k x^k(1-x)^{n-k}=nx(1-x),$$

但因爲對於任何實數 x 都有

$$x(1-x)\leqslant\frac{1}{4},$$

所以引理就證明了。

2. 現在我們來證明定理本身，我們先假定給定的區間 (a,b) 是區間(0, 1)。對於每一個自然數 n，我們令

$$\sum_{k=0}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)C_n^k x^k(1-x)^{n-k}=B_n(x);$$

顯然，$B_n(x)$ 是一個次數不超過 n 的多項式❶。現在我們來證明當 $n\to\infty$ 時，在區間(0,1)上，$B_n(x)$一致地趨向於 $f(x)$。

我們把函數 $|f(x)|$ 在區間(0,1)上的上確界記作 M。假定 ε 是任意一個正數，因爲 $f(x)$在區間(0,1)上連續(從而也就一致連續)，所以一定有這樣一個正數 δ 存在，使得當

$$|x_1-x_2|\leqslant\delta,\quad 0\leqslant x_1\leqslant 1,\quad 0\leqslant x_2\leqslant 1$$

時，我們有

$$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon.$$

❶ 這些"別恩斯坦多項式" $B_n(x)$ 就是我們在證明中要利用它性質的特殊解析工具。

以下的問題就在於要來估計差 $|B_n(x)-f(x)|$ 當 $0\leqslant x\leqslant 1$ 時的值。對於任何一個 x, 根據公式(4)

$$\sum_{k=0}^{n} f(x)C_n^k x^k(1-x)^{n-k}=f(x),$$

這就使得我們能够把差 $B_n(x)-f(x)$ 寫成便於估計的下列形式:

$$B_n(x)-f(x)=\sum_{k=0}^{n}\left[f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right]C_n^k x^k(1-x)^{n-k},$$

從而,當 $0\leqslant x\leqslant 1$ 時

$$|B_n(x)-f(x)|\leqslant\sum_{k=0}^{n}\left|f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right|C_n^k x^k(1-x)^{n-k}. \quad (7)$$

現在,我們把所有的數 k $(0\leqslant k\leqslant n)$分成兩組: (A)組中包含着滿足不等式

$$\left|\frac{k}{n}-x\right|\leqslant\delta \quad (A)$$

的那些 k, (B)組中則包含滿足另一個不等式

$$\left|\frac{k}{n}-x\right|>\delta \quad (B)$$

的 k,於是在不等式(7)中也可以對應地把和 $\sum\limits_{k=0}^{n}$ 分成兩部分,記作 $\sum_A$ 與 $\sum_B$。在 $\sum_A$ 中根據(A)每一項都有

$$\left|f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right|<\varepsilon,$$

因而

$$\sum_A\leqslant\varepsilon\sum_A C_n^k x^k(1-x)^{n-k}\leqslant\varepsilon\sum_{k=0}^{n}C_n^k x^n(1-x)^{n-k}=\varepsilon. \quad (8)$$

但是在 $\sum_B$ 的每一項中,我們都有

$$(k-nx)^2>n^2\delta^2,\quad \left|f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right|\leqslant 2M,$$

所以

$$\sum_{\mathrm{B}}\leqslant\frac{2M}{n^2\delta^2}\sum_{\mathrm{B}}(k-nx)^2C_n^k x^k(1-x)^{n-k}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{2M}{n^2\delta^2}\sum_{k=0}^{n}(k-nx)^2C_n^k x^k(1-x)^{n-k},$$

從而根據我們所證明的引理

$$\sum_{\mathrm{B}}<\frac{M}{2n\delta^2} \tag{9}$$

最後，從(7)，(8)與(9)，我們就得到：

$$|B_n(x)-f(x)|\leqslant\sum_{\mathrm{A}}+\sum_{\mathrm{B}}<\varepsilon+\frac{M}{2n\delta^2};$$

如果 n 大到能使得$\frac{M}{2n\delta^2}<\varepsilon$，就有

$$|B_n(x)-f(x)|<2\varepsilon\qquad(0\leqslant x\leqslant 1);$$

因為 $\varepsilon>0$ 可以任意小，所以在區間(0, 1)上一致地

$$B_n(x)\to f(x)\qquad(n\to\infty),$$

而這就是我們所要證明的。

3. 把對區間(0,1)證明的定理推廣到任意區間(a, b) $(a<b)$，現在已經沒有什麼困難。假定函數 $f(x)$ 在區間(a, b)上連續。我們令 $x=a+(b-a)y$，於是 $y=\frac{x-a}{b-a}$，從而當 x 從 a 變到 b 時，y 從 0 變到 1。令

$$f(x)=f[a+(b-a)y]=\varphi(y)\qquad(0\leqslant y\leqslant 1).$$

很明顯，函數$\varphi(y)$在區間(0,1)上連續，因而，對於無論多麼小的$\varepsilon>0$，根據已經證明的定理，一定有這樣一個多項式 $P(y)$存在，使得

$$|\varphi(y)-P(y)|<\varepsilon\qquad(0\leqslant y\leqslant 1),$$

或者，另外一個寫法，

$$\left|f(x)-P\left(\frac{x-a}{b-a}\right)\right|<\varepsilon \qquad (a\leqslant x\leqslant b);$$

但是 $P\left(\frac{x-a}{b-a}\right)$ 顯然是 x 的一個多項式，我們把它簡單地記作 $Q(x)$，於是

$$|f(x)-Q(x)|<\varepsilon \qquad (a\leqslant x\leqslant b);$$

因爲 ε 可以任意小，這就說明函數 $f(x)$ 在區間 (a, b) 上可以用多項式來一致逼近。基本定理於是就完全證明了。

我們已經知道，上面證明的這個定理跟下述命題等價：

每一個在區間 (a, b) 上連續的函數 $f(x)$ 都可以在這個區間上展開成一個一致收斂的多項式級數。

第二十一章　三角級數

§ 81. 福里哀係數

在這一章裏我們要研究所謂三角級數的初步理論，這些所謂的三角級數，繼冪級數之後，形成了在理論上以及許多應用方面也都是極為重要的又一類級數。所謂三角級數是指下列形式的級數：

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx), \tag{1}$$

其中 $a_0, a_1, a_2, \cdots, b_1, b_2, \cdots$ 都是實的常數，稱為級數 (1) 的係數。我們在本章中就要看到：就其性質來說，三角級數與冪級數有着顯著的區別，在某些方面，作為研究它所代表的函數的一個工具，三角級數顯得比較複雜而又累贅；但是，在另一些方面，跟冪級數比較起來，它却又具有無可懷疑的優越之點。至於這兩個工具中到底那一個特別值得偏重的問題是不能在一般的情形下來解答的。它的解答首先依賴於我們所研究的函數的形式，其次還依賴於我們對這個函數提出的究竟是什麼樣的問題。例如我們知道，用冪級數來表達函數時，需要這個函數具有任何級的導數，而對於函數的三角級數展開式，則我們不久就會知道，只要一級導數存在並且連續就够了❶。所以，對於三角級數來說，它所能包括的函數類型要比冪級數廣泛得多，而這一點也就是三角級數的無可懷疑的優越性。但是在另一方面，冪級數的收斂區域的形式非常簡單：它永遠是一個以點 O 為中心的區間，這是我們已經知道的。相反地，三角級數的收斂區域，一般說來，是一個構造非常複雜的集合，因而對它的研究就要求使用非常精密的方法（本書中就辦不到這一點）。

❶ 甚至於這個條件都還不是必要的。

所以，在問題的這一方面，冪級數比三角級數又顯著地要優越得多。

如果我們把變量 x 加上或減去 2π，顯然級數 (1) 的一切項都保持原來的值；因而，如果級數收斂的話，則它的和也不會改變。因此，級數 (1) 的和永遠是一個以 2π 爲週期的週期函數。如果函數 $f(x)$ 沒有這種週期性，則它就只能够在長度小於 2π 的區間上用三角級數來表達。不過，這個限制並不重要，而且不難用非常簡單的方法來消除它，這在以後我們會知道的。另一方面，由於三角級數各項的週期性，我們顯然只需要在(任意的)一個長度爲 2π 的區間上來研究這種級數就够了，作爲這樣一個區間，我們常常選取區間 $-\pi\leqslant x\leqslant\pi$。

在具有形式(1)的任何一個級數中出現的函數系

$$1,\ \cos x,\ \sin x,\ \cos 2x,\ \sin 2x,\ \cdots \tag{2}$$

具有一個非常重要的性質，這個性質是三角級數理論的基本中心並且幾乎是這個工具的一切優越性的來源。這個性質是這樣的：系 (2) 中的任何兩個函數都在任何一個長度爲 2π 的區間上，彼此正交。所謂函數 $f_1(x)$ 與 $f_2(x)$ 在區間(a, b)上彼此正交，是說：

$$\int_a^b f_1(x)f_2(x)\,dx=0.$$

假如我們有一系(有限個或無限個)函數，其中任意兩個函數都在區間(a, b)上彼此正交，這樣的函數系就稱爲該區間上的一個正交系。要證明函數系(2)在任意一個長度爲 2π 的區間上正交，顯然只要證明

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cos nx\,dx=0\quad(m\neq n;\ m,n=0,1,2,\cdots),$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\sin nx\,dx=0\quad(m\neq n;\ m,n=1,2,\cdots),$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\sin nx\,dx=0\quad(m=0,1,2,\cdots;\ n=1,2,\cdots).$$

由於

$$\cos mx\cos nx=\frac{1}{2}\{\cos(m+n)x+\cos(m-n)x\},$$

$$\sin mx\sin nx=\frac{1}{2}\{\cos(m-n)x-\cos(m+n)x\},$$

$$\cos mx\sin nx=\frac{1}{2}\{\sin(n+m)x+\sin(n-m)x\},$$

上述三個積分的計算都歸結到計算下列形式的積分：

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\,dx,\quad \int_{-\pi}^{\pi}\sin lx\,dx,$$

其中整數 k 不等於零，整數 l 是任意的。這兩個積分不難直接算出的確都等於零。

函數系如果具有了正交性，就在某種意義下變成了數學分析的一個有利工具。儘管系中的函數可能比系(2)中的函數要複雜得多，但是只要它們組成一個正交系，就常常能夠帶來很大的好處。在近代科學中我們碰到而且利用到許多這樣的正交系，而這些正交系的理論，通常都可以仿照函數系(2)以及與之關聯的三角級數的理論建立起來。

作爲函數系(2)的(已經證明了的)正交性的第一個簡單應用，我們對三角級數來考慮這樣一個問題（對冪級數我們早已解決了與這類似的問題）：假定函數 $f(x)$ 可以展開成三角級數(1)，要來求這個級數的係數 a_k, b_k。

假定級數（1）在區間 $(-\pi,\pi)$ 上一致收斂（也就是說，根據週期性，在整個數軸上一致收斂）並且它的和等於 $f(x)$，於是我們有

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)\quad(-\pi\leqslant x\leqslant\pi). \tag{3}$$

假定 n 是任意一個自然數，把級數（3）的各項乘以同一個函數 $\cos nx$，於是得到一個新級數，顯然，這個新級數在區間 $(-\pi,\pi)$ 上也一致收

斂，因爲這個級數的餘和 $r_k(x)\cos nx$ 的絕對值不超過級數 (3) 的餘和 $r_k(x)$的絕對值。新級數的和顯然等於 $f(x)\cos nx$，因此我們有

$$f(x)\cos nx=\frac{a_0}{2}\cos nx+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx\cos nx+b_k\sin kx\cos nx)$$

$$(-\pi\leqslant x\leqslant\pi).$$

根據 §75 定理 1，這個級數在區間 $(-\pi, \pi)$ 上可以逐項積分。左邊的積分等於

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx.$$

至於右邊的積分則由於系 (2) 的正交性，除去僅有的相當於 $k=n$ 那一項的積分

$$\int_{-\pi}^{\pi} a_n\cos^2 nx\,dx$$

而外，其餘積分全都等於零。因此，逐項積分的結果就得到：

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx=\int_{-\pi}^{\pi} a_n\cos^2 nx\,dx. \tag{4}$$

但是 $\cos^3 nx=\frac{1}{2}(1+\cos 2nx)$，於是得到

$$\int_{-\pi}^{\pi} a_n\cos^3 nx\,dx=a_n\left\{\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}dx+\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos 2nx dx\right\}=\pi a_n.$$

所以等式(4)就成爲

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx=\pi a_n,$$

也就是

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx \quad (n=1,2,\cdots). \tag{5}$$

完全類似的辦法，用 $\sin nx$ 遍乘級數(3)的各項，再在區間 $(-\pi,\pi)$ 上逐項積分，我們就得到：

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx \quad (n=1,2,\cdots). \tag{6}$$

最後把級數(3)本身在該區間上逐項積分得出：

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx=\pi a_0,$$

也就是

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx. \tag{7}$$

這裏，公式(7)其實可以看作是公式(5)當 $n=0$ 時的特殊情形。這也正是三角級數的常數項時常寫作 $\frac{a_0}{2}$ 而不寫作 a_0 的緣故。

公式(5)，(6)，(7)完全解決了我們所提出的問題，因爲這些公式使我們能够從已知函數 $f(x)$（三角級數的和）求出它的係數 a_k，b_k（在級數一致收斂的條件下）。正如冪級數的情形一樣，我們看到，這些係數由函數 $f(x)$唯一地表達了出來；因而，只可能存在一個一致收斂的三角級數，它的和等於已知函數 $f(x)$。只是在冪級數的情形，係數的表達式要求函數 $f(x)$ 具有任何級的導數，而與之相反，在這裏公式(5)，(6)，(7)除了我們提出的問題本身所假定的函數的性質而外，就不再要求任何其他條件了。事實上，由級數(3)的一致收斂性（這是一開始就假定了的）可以推出函數 $f(x)$（因而，函數 $f(x)\cos nx$ 與 $f(x)\sin nx$）的連續性（從而其可積性）。要想公式(5)，(6)，(7)具有實際意義，除了這個可積性而外已經別無所求了。

由函數 $f(x)$ 根據公式(5)，(6)，(7)所確定的數 a_n, b_n 通常稱爲這

個函數的福里哀係數（雖然公式(5)，(6)，(7)是尤拉在福里哀之前發現的）。因此，對於任何一個在區間$(-\pi, \pi)$上連續的函數$f(x)$，我們都可以利用這些公式算出它的全部福里哀係數$a_0, a_1, a_2, \cdots, b_1, b_2, \cdots$。用這些福里哀係數作係數的三角級數(1)稱爲函數$f(x)$的福里哀級數。因此，簡單地說，每一個在區間$(-\pi, \pi)$上連續的函數$f(x)$都有福里哀級數。不過，跟冪級數的情形一樣，由此我們還不能做出任何關於$f(x)$是否可以展開成三角級數的結論。首先，對於$f(x)$所作的福里哀級數可能對於某些（甚至可能全部）x的值發散。其次，即使我們假定這個級數對一切x的值都收斂，我們也還不能斷定它的和是否就是$f(x)$。所以，函數$f(x)$究竟應該具有什麼樣的性質才能的確等於它自己的福里哀級數的和，這還是一個尚待研究的問題。目前我們只知道一點：如果在區間$(-\pi, \pi)$上有一個三角級數一致收斂於函數$f(x)$，則這個級數一定是它的福里哀級數。

在本教程中，除了函數系(2)以外，我們不可能還考慮其他的正交函數系。不過，我們仍然願意指出：我們以上談到的關於福里哀級數與係數的一切，唯一的根據是函數系(2)的正交性，一點也沒有接觸到系中的三角函數的任何特殊性質，因而可以不經任何改變就推廣到任意的正交系上來。如果連續函數

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \cdots, \varphi_n(x), \cdots \tag{8}$$

在某區間(a, b)上組成一個正交系，又如果級數

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x) = f(x) \tag{9}$$

在區間(a, b)上一致收斂，其中a_n都是實的常數，則跟上面一樣，我們容易知道：

$$\int_a^b f(x)\varphi_n(x)\,dx = a_n \int_a^b \varphi_n^2(x)\,dx \quad (n=1, 2, \cdots);$$

爲簡單起見，我們不妨假定❶

$$\int_a^b \varphi_n^2(x)\,dx=1 \quad (n=1, 2, \cdots),$$

於是就得到：

$$a_n=\int_a^b f(x)\varphi_n(x)\,dx \quad (n=1, 2, \cdots) \tag{10}$$

我們根據公式(10)對函數 $f(x)$ 所作的數 a_n，稱爲這個函數（關於正交系(8)）的福里哀係數，級數(9)稱爲它的（同樣關於正交系(8)的）福里哀級數。

正交系的一般理論是數學分析的重要章節之一，它具有很多的實際應用。關於它的研究工作，即使在今天，也還在廣泛地進行着。這個理論中許多方面是我們祖國的科學家車貝謝夫與李雅普諾夫以及蘇維埃數學家們（巴瑞、柯爾莫廓若夫、魯津、孟曉夫、斯捷克洛夫等）的供獻。

§ 81 的練習可以選用 Б. П. 捷米多維奇的習題集，第五章，習題 332, 334, 341—344。

§ 82. 平均逼近

在進入討論福里哀級數收斂的基本問題以前，我們現在要證明，對於一個給定的函數的福里哀係數來說，有許多實際意義是它們本來就有的，完全與 § 81 級數(3)的收斂與否無關。如果這個級數在某一點 x 收斂，則函數 $f(x)$ 可以用級數的部分和

---

❶ 滿足這個要求的函數系(8)稱爲是標準的。顯然，任何函數系(8)都可以用某些常數乘它的函數使之成爲標準的函數系。例如，對於系(2)來說，只要在第一項乘以 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$，其餘的項乘以 $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$ 就變成爲標準的了。

$$s_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$$

(所謂"三角多項式")來逼近它到任何精確程度。一般我們把和

$$T_n(x)=\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k\cos kx+\beta_k\sin kx) \tag{1}$$

稱爲一個 n 次的三角多項式，其中 α_k, β_k 都是實常數。

在第二十章中我們已經知道，不管函數能否展開成冪級數，總可以考慮用多項式來逼近它的問題。同樣的情形，我們現在也可以不管函數 $f(x)$ 是否可以展開成三角級數而來考慮用三角多項式(1)來逼近這個函數。

如果這個三角多項式的次數 n 已經預先指定了，那末很自然地會提出這樣的問題：應該怎樣來選取多項式 $T_n(x)$ 的係數 α_k, β_k 才能使得逼近的程度最好。爲此，如果對函數 $f(x)$ 的逼近不是就任何個別的點來說的，而是指整個區間 $(-\pi, \pi)$ 來說的，則我們還有必要來確定一下，究竟我們所說的"最好的逼近"是什麼意思。我們很自然地會想到，可以用差 $f(x)-T_n(x)$ 的絕對值的大小來作爲逼近程度的優劣的標準，可是這個差在區間 $(-\pi, \pi)$ 上不同的點會取不同的數值。如果我們有兩個不同的三角多項式 $T_n(x)$，則一般說來，這個差在某一點對第一個多項式來說比較小，而在另外一點却又對第二個多項式才小一些。於是，在這種情形下，我們就不能直接看出來，究竟這兩個多項式中，我們應當認爲那一個逼近函數 $f(x)$ 較好，那一個較壞。因此，要想對不同的多項式的逼近程度的優劣能够有一個統一的估價，我們顯然需要約定用某種確定的數來衡量和估計每一個個別的多項式的這種逼近的優劣程度。我們可以有各種不同的方法來選擇作爲這個用途的這種數，正好像我們可以用不同的溫度計來測量溫度一樣。而且在這裏，也跟測量溫度的情形一樣，我們選用這種或那種估計方法，並不是

由於原則上有什麼出入，而只是根據實際上的方便。

好像我們用兩點間的距離來測量兩個點間的接近程度一樣，爲了估計函數 $f(x)$ 與三角多項式 $T_n(x)$ 間的逼近程度，我們可以用某種合理的方法來確定它們之間的"距離"。這個距離愈小，三角多項式 $T_n(x)$ 對函數 $f(x)$ 的逼近就愈好。當然，無論用那一種方法來確定這樣的距離，都應當考慮差 $f(x)-T_n(x)$ 在區間 $(-\pi,\pi)$ 的一切點上的值。例如量 $|f(x)-T_n(x)|$ 在區間 $(-\pi,\pi)$ 上的上確界就可以作爲距離的一個合理的定義。又如這個量在區間 $(-\pi,\pi)$ 上的"平均值"

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)-T_n(x)|dx \tag{2}$$

也是另外一種可以採用的定義。但是用差 $f(x)-T_n(x)$ 的平方的平均值

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-T_n(x)]^2dx=\rho(f,T_n) \tag{3}$$

來作爲 $f(x)$ 與 $T_n(x)$ 間的距離的定義是更加方便的（這個定義在正交系的理論中已經普遍採用）。這個定義比定義 (2) 優越的地方是在於：在各種不同的計算中，處理函數的平方要比處理函數的絕對值來得方便。

今後我們就用公式(3)來確定函數 $f(x)$ 與三角多項式 $T_n(x)$ 間的距離。因此如果我們說多項式 $T_{n,1}(x)$ 與 $T_{n,2}(x)$ 中，第一個逼近函數 $f(x)$ 比第二個好，那就是指：

$$\rho(f,T_{n,1})<\rho(f,T_{n,2}).$$

又如果在所有的 n 次三角多項式中，多項式 $T_n(x)$ 的 $\rho(f,T_n)$ 最小，則我們就說用 $T_n(x)$ 來逼近 $f(x)$ 最好。

在我們有了這個定義以後，我們現在來考慮以下這個（完全有確定意義的）問題：求出那個使得量 $\rho(f,T_n)$ 取到最小值的 n 次多項式來。

當然,求出多項式 $T_n(x)$ 就意味着要求出它的係數，很明顯，如果多項式 $T_n(x)$ 是由公式(1)確定的，則量 $\rho(f, T_n)$ 就是這些係數的函數，也就是說是 $2n+1$ 個數 $\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ 的函數。因此，問題就在於要求出這 $2n+1$ 個數的值,使得量 $\rho(f, T_n)$ 能够取到它的最小可能的值。

爲了這個目的,我們把量 $\rho(f, T_n)$ 的表達式(3)寫成下面的形式:

$$\frac{1}{2\pi}\left\{\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx+\int_{-\pi}^{\pi} T_n^2(x)\,dx-2\int_{-\pi}^{\pi} f(x)T_n(x)dx\right\}. \tag{4}$$

用公式(1)來定義 $T_n(x)$ 並且用 a_n, b_n 來記函數 $f(x)$ 的福里哀係數,於是根據 § 81 的公式 (5),(6)與(7)我們就得到:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)T_n(x)\,dx=\pi\left\{\frac{\alpha_0 a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k a_k+\beta_k b_k)\right\}. \tag{5}$$

另一方面,利用公式

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 kx\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 kx\,dx=\pi\quad(k=1, 2, \cdots)$$

與 § 81 中函數系(2)的正交性,我們又可以算出:

$$\int_{-\pi}^{\pi} T_n^2(x)\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}\left\{\frac{\alpha_0^2}{4}+\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k^2\cos^2 kx+\beta_k^2\sin^2 kx)\right\}dx=$$

$$=\pi\left\{\frac{\alpha_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k^2+\beta_k^2)\right\}. \tag{6}$$

把我們求出的表達式(5)與(6)代入量 $\rho(f, T_n)$ 的表達式(4),就得到:

$$\rho(f, T_n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx+$$

$$+\frac{1}{2}\left\{\frac{\alpha_0^2-2\alpha_0 a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}[(\alpha_k^2-2\alpha_k a_k)+(\beta_k^2-2\beta_k b_k)]\right\}.$$

再把下面兩個等式

$$\alpha_k^2-2\alpha_k a_k=(\alpha_k-a_k)^2-a_k^2,$$
$$\beta_k^2-2\beta_k b_k=(\beta_k-b_k)^2-b_k^2,$$

代入上式，我們得到：

$$\rho(f,T_n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\,dx-\frac{1}{2}\left\{\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)\right\}+$$

$$+\frac{1}{2}\left\{\frac{(\alpha_0-a_0)^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}[(\alpha_k-a_k)^2+(\beta_k-b_k)^2]\right\}.$$

在這個等式的右端，前兩項與多項式 $T_n(x)$ 的係數 α_k, β_k 無關。所以數 α_k, β_k 應該這樣選擇使得第三項取到最小可能的值，也就是說，要使量

$$\frac{1}{2}\left\{\frac{(\alpha_0-a_0)^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}[\alpha_k-a_k)^2+(\beta_k-b_k)^2]\right\}$$

取到最小可能的值。但是很明顯，這個量當我們選取

$$\alpha_k=a_k\quad(k=0,1,\cdots),$$
$$\beta_k=b_k\quad(k=1,2,\cdots)$$

時等於零，並且對於數 α_k, β_k 的任何其他選擇則總是正的。這樣一來我們的問題就解決了。我們已經看到，要想得到最好的逼近，對於任何 n，多項式 $T_n(x)$ 的係數都應該選作函數 $f(x)$ 的對應的福里哀係數。當然，我們應當指出，這個結論只有在用量(3)來估計函數 $f(x)$ 與多項式 $T_n(x)$ 的距離的條件下才成立。對於另外的距離的定義，我們一般會得到數 α_k, β_k 的另外的值。

用兩個函數之差的平方的平均值作爲兩個函數之間的距離來測量逼近的程度，叫做**平均逼近**。因此，我們以上得到的結果可以敍述如下：

定理 1 在一切 n 次的三角多項式中，多項式

$$T_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$$

是連續函數 $f(x)$ 的最好的平均逼近，其中 a_k, b_k 是函數 $f(x)$ 的福里哀係數。這時

$$\rho(f,T_n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\,dx-\frac{1}{2}\left\{\frac{a_0{}^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)\right\}. \qquad (7)$$

等式(7)具有一個頗饒興趣的性質。因爲顯然 $\rho(f,T_n)\geqslant 0$，所以對於任何一個 n 都有

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)\leqslant\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\,dx;$$

這個不等式的右端與 n 無關，從而級數

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2)$$

的部分和當 $n\to\infty$ 時保持有界。又因爲這個級數是正項級數，所以它必定收斂。因此，連續函數的福里哀係數的平方永遠組成一個收斂級數。特別是，由此可以推出，對於連續函數來說，我們永遠有

$$a_n\to 0,\ b_n\to 0 \quad (n\to\infty).$$

§ 83. 關於三角函數系的封閉性的迪里赫勒——李雅普諾夫定理

在冪級數的理論中我們已經知道以下這個重要事實，即同一個冪級數可以是無窮多個不同的函數的馬克洛林級數。對於福里哀級數的理論，自然也會產生同樣的問題，並且這個問題也同樣具有極大的重要

性：是否同一個三角級數可以是若干不同函數的福里哀級數？我們首先應該注意，在解答這個問題時，我們自然地只限於討論連續函數，因爲否則這個問題的答案是顯然的。事實上，如果許可考慮不連續函數，則我們可以改變所給的函數 $f(x)$ 在隨便那一點的值來得到新的函數，不難驗證這種新函數與原來的函數 $f(x)$ 就有相同的福里哀級數，因爲在 § 81 的公式(5)，(6)，(7) 中的積分在函數 $f(x)$ 作上述變更時，並不改變它們的值。

下面我們就要看到，我們所提出的問題是與三角函數的正交系

$$1,\ \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cdots$$

的一個重要性質緊密地相關聯的。假定在區間 $(-\pi, \pi)$ 上有兩個彼此不同的連續函數 $f_1(x)$ 與 $f_2(x)$ 具有同一個福里哀級數（也就是說它們有同樣的福里哀係數）。我們來考慮函數

$$f(x)=f_1(x)-f_2(x).$$

根據 § 81 的公式(5)，(6)，(7)可知，函數 $f(x)$ 的每一個福里哀係數都等於函數 $f_1(x)$ 與 $f_2(x)$ 的對應係數之差，因而也就等於零。所以我們有：

$$\left.\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx=0,\\ \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx=0\end{aligned}\right\}\qquad (k=0,1,2,\cdots).$$

但是這一組等式表明，函數 $f(x)$ 與系(1)中的任何一個函數都在區間 $(-\pi, \pi)$ 上正交。所以，**如果在區間 $(-\pi, \pi)$ 上能夠有兩個彼此不同的連續函數具有同一個福里哀級數，則也就一定有一個不恆等於零的連續函數在該區間上與系(1)中的一切函數都正交。**

不難看出，這個命題的逆命題也是對的。事實上，如果有一個函數 $f(x)$ 在區間 (a, b) 上連續，不恆等於零並且與系(1)中的一切函數都在

區間 $(-\pi,\pi)$ 上正交；又如果 $\varphi(x)$ 是任意一個在該區間上連續的函數，則顯然函數 $\varphi(x)+f(x)$ 在區間 $(-\pi,\pi)$ 上連續並且與 $\varphi(x)$ 不相同，但同時它的一切福里哀係數却與函數 $\varphi(x)$ 的對應的係數完全一樣。

所以，我們所提出的問題已經變成了這樣一個問題：在正交系(1)中是否還可以"添上"一個不恆等於零的連續函數，使得擴充後的函數系仍舊保持正交性。函數系(1)這樣擴充的可能性，是能够有兩個彼此不同的連續函數具有同一個福里哀級數的必要充分條件。一個能够這樣擴充的正交系稱為是不完備的正交系。反之，如果一個正交系不能够這樣擴充時，就稱為是完備的正交系。因此，我們現在已經轉到這樣一個問題：正交系(1)究竟是完備的還是不完備的。

函數系(1)的完備性這個重要事實，可以從迪里赫勒關於三角級數收斂性的著名研究中推出來。但是，這大概是在較晚一些時候，才由卓越的俄國科學家，A. M. 李雅普諾夫院士第一次明確地敍述出來並且獨立地加以證明的。因此我們以後把這個定理叫做迪里赫勒—李雅普諾夫定理。

迪里赫勒—李雅普諾夫定理. 正交系(1)是完備的。

證明. 假定函數 $f(x)$ 在區間 $(-\pi,\pi)$ 上連續，而且在這個區間上與系(1)中的一切函數正交。我們要證明 $f(x)=0$ $(-\pi\leqslant x\leqslant\pi)$。

顯然，從函數 $f(x)$ 與系(1)中的一切函數正交可以直接推出 $f(x)$ 與任何三角多項式 $T(x)$ 正交。我們用反證法：假定函數 $f(x)$ 在區間 $(-\pi,\pi)$ 上不恆等於零，從這個假定出發，我們來作出一個在區間 $(-\pi,\pi)$ 上 $f(x)$ 與它不可能正交的三角多項式。

不妨假定當 $x=\alpha$ 時 $f(x)>0$，$-\pi<\alpha<\pi$。於是對於充分小的 $\delta>0$ 我們可以使得在整個區間 $(\alpha-\delta,\alpha+\delta)$ 上都有 $f(x)>0$。假定 $c>0$ 是函數 $f(x)$ 在這個區間上的最小值，於是

$$f(x)\geqslant c>0\ (\alpha-\delta\leqslant x\leqslant\alpha+\delta),$$

現在令

$$T_n(x)=\left\{\frac{1+\cos(x-\alpha)}{2}\right\}^n,$$

其中 n 是任意一個自然數。用二項式公式依升冪展開，我們顯然得到:

$$T_n(x)=\sum_{r=0}^{n}c_r[\cos(x-\alpha)]^r,$$

其中 c_r 都是實常數。大家都知道，函數$(\cos x)^r$ 對於任何 $r\geqslant 0$ 都可以表作下列諸函數的常係數的線性組合❶:

$$1,\cos x,\cos 2x,\cdots,\cos rx.$$

把上面和中的各項都這樣展開，就得到:

$$T_n(x)=\sum_{r=0}^{n}d_r\cos r(x-\alpha),$$

其中 d_r 都是常數。最後由於對任何 r

$$\cos r(x-\alpha)=\cos r\alpha\cos rx+\sin r\alpha\sin rx,$$

我們得到 $T_n(x)$的如下形式的表達式:

$$T_n(x)=\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k\cos kx+\beta_k\sin kx),$$

其中 α_k, β_k 都是常數。這就表示對於任何自然數 n，函數 $T_n(x)$ 都是一個三角多項式。我們現在要證明，只要 n 充分大，這個多項式就不可

---

❶ 證明. 當 $r=1$ 時結論顯然成立。如果

$$(\cos x)^r=\sum_{s=0}^{r}a_s\cos sx,$$

則

$$(\cos x)^{r+1}=(\cos x)^r\cos x=\sum_{s=0}^{r}a_s\cos sx\cos x=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{s=0}^{r}a_s[\cos(s+1)x+\cos(s-1)x]=\sum_{s=0}^{r+1}\beta_s\cos sx.$$

能在區間$(-\pi, \pi)$上與函數$f(x)$正交。

我們先從圖形上來看看函數$T_n(x)$，當n很大時，在區間$(-\pi, \pi)$上的變化情形；正好，這可以幫助我們清楚地看到我們以下證明中的主導思想。量

$$\frac{1+\cos(x-\alpha)}{2}$$

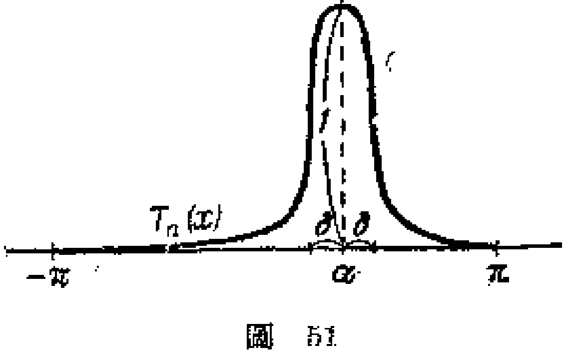


圖　51

(其n次方就是多項式$T_n(x)$)顯然處處是正的；它當$x=\alpha$時等於1，當x是區間$(-\pi, \pi)$上的其他值時小於1。所以，當n很大時，函數$T_n(x)$也到處都是正的，當$x=\alpha$時它等於1，並且當x離α稍遠一些時它就很小。所以這個函數的變化情形大致如圖 51 所畫出的那樣。我們的目的是要證明：當n充分大時，積分

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)T_n(x)\,dx \tag{2}$$

不可能等於零。爲此，我們分積分(2)爲兩部分：

$$\int_{\alpha-\delta}^{\alpha+\delta} f(x)T_n(x)\,dx=I_1$$

與

$$\left[\int_{-\pi}^{\alpha-\delta}+\int_{\alpha+\delta}^{\pi}\right] f(x)T_n(x)\,dx=I_2.$$

因爲積分I_2是在$T_n(x)$的值非常小的區間上進行積分的，我們有理由希望這部分積分的絕對值也非常小。反過來，關於積分I_1，我們知道在積分區間上$f(x)\geqslant c>0$處處成立，又函數$T_n(x)$取它的最大的數值。因此，我們也有一切根據來這樣想，就絕對值來說，I_1要比I_2更大得多。但是，這也就是我們所需要的一切，因爲當$I_1>|I_2|$時我們

就不可能得到 $I_1+I_2=0$ 了。

要證實我們上述的預測，以下我們來進行一些必要的計算。因為

$$\frac{1+\cos(x-\alpha)}{2}=\cos^2\left(\frac{x-\alpha}{2}\right),$$

所以

$$I_1=\int_{\alpha-\delta}^{\alpha+\delta} f(x)\cos^{2n}\left(\frac{x-\alpha}{2}\right)dx\geqslant c\int_{\alpha-\delta}^{\alpha+\delta}\cos^{2n}\left(\frac{x-\alpha}{2}\right)dx.$$

以 $x=\alpha+y$ 代入，得到：

$$I_1\geqslant c\int_{-\delta}^{\delta}\cos^{2n}\left(\frac{y}{2}\right)dy=2c\int_{0}^{\delta}\left(1-\sin^2\frac{y}{2}\right)^n dy.$$

因為在區間 $(0,\delta)$ 上，$0\leqslant\sin\frac{y}{2}<1$ 又 $0<\cos\frac{y}{2}\leqslant 1$，所以

$$\left(1-\sin^2\frac{y}{2}\right)^n\geqslant\left(1-\sin\frac{y}{2}\right)^n\cos\frac{y}{2},$$

因而我們得到：

$$I_1\geqslant 2c\int_0^{\delta}\left(1-\sin\frac{y}{2}\right)^n\cos\frac{y}{2}dy,$$

以 $\sin\frac{y}{2}=z$ 代入卽得

$$I_1\geqslant 4c\int_0^{\sin\frac{\delta}{2}}(1-z)^n dz=\frac{4c}{n+1}\left\{1-\left(1-\sin\frac{\delta}{2}\right)^{n+1}\right\}>\frac{2c}{n+1},\qquad(3)$$

因為當 n 充分大時，括號中的數顯然大於 $\frac{1}{2}$。

我們從下面估計了積分 I_1 的值；現在我們要從上面來估計積分 I_2 的絕對值。用 M 來記函數 $|f(x)|$ 在區間 $(-\pi,\pi)$ 上的最大值。在 I_2 的兩個積分的積分區間上（卽對於 $|x-\alpha|>\delta$），我們有：

$$\cos^2\left(\frac{x-\alpha}{2}\right)\leqslant\cos^2\left(\frac{\delta}{2}\right),$$

從而，

$$|T_n(x)| \leqslant \cos^{2n}\left(\frac{\delta}{2}\right);$$

因此

$$|I_2| \leqslant M\cos^{2n}\left(\frac{\delta}{2}\right)[\alpha-\delta-(-\pi)+\pi-(\alpha+\delta)]<$$

$$<2\pi M\cos^{2n}\left(\frac{\delta}{2}\right)=2\pi M r^n, \tag{4}$$

其中

$$r=\cos^2\left(\frac{\delta}{2}\right)<1.$$

因為對於充分大的 n 我們有[1]：

$$2\pi M r^n<\frac{2c}{n+1},$$

所以從(3)與(4)我們可以推出 $|I_2|<I_1$，只要 n 充分大。因此只要 n 充分大，等式

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)T_n(x)\,dx=I_1+I_2=0$$

就不可能成立，這就證明了迪里赫勒—李雅普諾夫定理。

因此，我們已經看到，關於我們所考慮的問題，福里哀級數與馬克洛林級數完全不同：每一個三角級數頂多是一個連續函數的福里哀級數。

§ 84. 福里哀級數的收斂性

我們現在回到我們的基本問題：函數 $f(x)$ 究竟應該具有什麼樣的性質纔能使得它的福里哀級數收斂並且級數和就是 $f(x)$。這個問題的全部內容是非常複雜的，甚至於就是今天的科學，離開這個問題的徹底解決也還很遠。一方面我們知道有一系列的判別法，用它們可以斷定這

---

[1] 這可以從關係式 $nr^n\to 0(n\to\infty)$ 推出來(參看 § 77 定理 4 的證明)。

一類或那一類的函數能够展開成福里哀級數，而另一方面又有大量的例子指出，有些構造非常簡單的函數，它們的福里哀級數却是發散的。在這一節裏我們只在這方面證明一個命題，這個命題已經可以指出，能够展開成福里哀級數的函數族比起可以展開成冪級數的函數族要廣到什麼程度。

定理. 以 2π 爲週期並且有連續一級導數的函數 $f(x)$ 可以在整個數軸上展開成一致收斂的三角級數（根據 § 81 的結果，這個三角級數就是 $f(x)$ 的福里哀級數）。

證明. 我們把函數 $f(x)$ 的福里哀係數記作 a_k, b_k，函數 $f'(x)$ 的福里哀係數記作 a'_k, b'_k。在 § 81 的公式 (5) 與 (6) 中，利用分部積分法，得出當 $k>0$ 時

$$\pi a_k=\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx=$$

$$=\left(\frac{f(x)\sin kx}{k}\right)\Big|_{-\pi}^{\pi}-\frac{1}{k}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\sin kx\,dx=-\frac{\pi b'_k}{k},$$

$$\pi b_k=\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx=$$

$$=\left(-\frac{f(x)\cos kx}{k}\right)\Big|_{-\pi}^{\pi}+\frac{1}{k}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\cos kx\,dx=\frac{\pi a'_k}{k}.$$

因此，我們有：

$$a_k=-\frac{b'_k}{k},\quad b_k=\frac{a'_k}{k}\ (k=1,2,\cdots). \tag{1}$$

因爲對於任何兩個數 α 與 β，從

$$\alpha^2+\beta^2-2|\alpha\beta|=(|\alpha|-|\beta|)^2\geqslant 0$$

可以得到

$$2|\alpha\beta|\leqslant\alpha^2+\beta^2,$$

所以關係式(1)給出：

$$2|a_k|\leqslant b_k'^2+\frac{1}{k^2},\quad 2|b_k|\leqslant a_k'^2+\frac{1}{k^2},$$

從而對於任何 x 我們都有

$$|a_k\cos kx+b_k\sin kx|\leqslant|a_k|+|b_k|\leqslant\frac{1}{2}(a_k'^2+b_k'^2)+\frac{1}{k^2}\tag{2}$$

因爲數 a_k', b_k' 是連續函數 $f'(x)$的福里哀係數，根據 § 82 的結果，我們知道級數

$$\sum_{k=1}^{\infty}(a_k'^2+b_k'^2)$$

收斂。又因爲級數 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ 也收斂，所以不等式(2)的右端是一個收斂的正項數值級數的第 k 項。於是根據(2)，級數

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)\tag{3}$$

在整個數軸上絕對收斂而且一致收斂。我們把它的和記作 $s(x)$。根據 § 81 的主要結果，級數(3)就是函數 $s(x)$ 的福里哀級數；但是根據定義它同時又是函數 $f(x)$ 的福里哀級數。因爲函數 $f(x)$ 與 $s(x)$ 都連續，所以根據 § 83, 它們應當彼此恆等，而這樣我們的定理就證明了。

§ 85. 廣義的三角級數

在 § 81 中我們已經指出了，一個可以在整個數軸上展開成三角級數的函數只能是以 2π 爲週期的函數，這是非常顯然的事。至於函數 $f(x)$ 不具有這個性質時，則最多它可以在(任何)長度等於 2π 的區間 $(a, a+2\pi)$ 上展開，並且這時顯然還要求 $f(a+2\pi)=f(a)$。自然，如果我們沒有比較簡單的辦法來解除這個限制的話，則把三角級數作爲一個工具來應用時，這個限制就成了一個莫大的障礙。因而在這一節裏

我們要簡單地來考慮一下這樣一個問題：應當如何藉助於三角級數概念的簡單而又自然的擴充，來解除以上所說的困難。為了簡單起見，我們以下永遠假定已知函數 $f(x)$ 在區間 (a, b) 上每一點都有連續的導數，這裏區間 (a, b) 就是我們想把 $f(x)$ 在它上面展開成三角級數的那個區間。

如果我們所考慮的區間$(a, a+\lambda)$的長度小於 $2\pi(\lambda<2\pi)$，則問題非常簡單：只要用隨便什麼方法把函數$f(x)$簡單地擴展到區間$(a+\lambda, a+2\pi)$上去，使得$f(a+2\pi)=f(a)$, $f'(a+2\pi)=f'(a)$ 並且使得函數$f(x)$ 在整個區間 $(a, a+2\pi)$ 上有連續的導數(當然，要辦到這一點可以有無數多種方法)。根據 § 84 的定理，擴展後的函數可以在區間 $(a, a+2\pi)$ 上展開成一個一致收斂的級數，顯然這個級數在區間 $(a, a+\lambda)$ 上的和就等於已知函數 $f(x)$，而這樣就解決了我們所提出的問題。這裏還有一點值得注意的是：當 $\lambda<2\pi$ 時，把函數$f(x)$ 擴展到整個區間 $(a, a+2\pi)$ 上可以有無窮多種不同的方法，因而對於原來的函數來說就可以有無窮多個不同的福里哀級數。當然，如果在整個區間 $(a, a+2\pi)$ 上來考慮，這些級數的和自然是彼此不同的函數。但是在區間 $(a, a+\lambda)$ 上則所有這些和都等於函數$f(x)$。所以，在長度小於 2π 的區間上，一個函數，一般說來，可以展開成無窮多個彼此不同的三角級數。

現在假定 $\lambda>2\pi$。我們再假定函數$f(x)$ 在區間 $(a, a+\lambda)$ 上有連續導數，並且 $f(a+\lambda)=f(a), f'(a+\lambda)=f'(a)$。於是在區間$(a, a+\lambda)$以外，我們可以利用週期性(週期為 λ)把函數$f(x)$擴展到整個數軸上去。

令

$$x=a+\frac{\lambda}{2\pi}y,\quad f(x)=f\left(a+\frac{\lambda}{2\pi}y\right)=\varphi(y).$$

顯然函數 $\varphi(y)$是一個以 2π 為週期的週期函數(因為當 y 增大 2π 時，

x就增大λ），並且對於任何y都有連續的微商。我們用a_k, b_k，來記這個函數的福里哀係數，根據§84的定理，對任何y我們有：

$$\varphi(y)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos ky+b_k\sin ky),$$

並且這個級數在整個數軸上一致收斂。因爲

$$y=\frac{2\pi}{\lambda}(x-a),$$

所以在整個數軸上

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k\cos\frac{2\pi k}{\lambda}(x-a)+b_k\sin\frac{2\pi k}{\lambda}(x-a)\right], \qquad (1)$$

並且這個級數也一致收斂。應用關於正弦函數與餘弦函數的差角公式到下面的兩個表達式中去：

$$\cos\frac{2\pi k}{\lambda}(x-a), \quad \sin\frac{2\pi k}{\lambda}(x-a),$$

我們就把展開式(1)化成了如下的形式：

$$f(x)=\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\alpha_k\cos\frac{2\pi k}{\lambda}x+\beta_k\sin\frac{2\pi k}{\lambda}x\right),$$

其中α_k, β_k都是常數。特別當$a\leqslant x\leqslant a+\lambda$時，這個級數的和就等於函數$f(x)$在該區間上給定的對應的值。

所以，我們知道在任何區間$(a, a+\lambda)$上給定的函數$f(x)$（在我們所說的條件下）在整個該區間上可以展開成一個一致收斂的廣義三角級數，這個級數與§81中級數(1)的差別僅在於它以函數

$$1, \cos\frac{2\pi n}{\lambda}x, \sin\frac{2\pi n}{\lambda}x \qquad (n=1, 2, \cdots)$$

來作爲展開式的元素而不是用的§81的函數系(2)。不難驗證上面這些函數在區間$(a, a+\lambda)$(亦即在長度爲λ的任何區間)上組成一個正交

系。這個系中的一切函數都以 λ 爲週期。至於係數 α_k, β_k, 我們不難用以前的方法求出它們的表達式就是：

$$\alpha_k=\frac{2}{\lambda}\int_a^{a+\lambda} f(x)\cos\frac{2\pi k}{\lambda}x\,dx \qquad (k=0,1,2,\cdots),$$

$$\beta_k=\frac{2}{\lambda}\int_a^{a+\lambda} f(x)\sin\frac{2\pi k}{\lambda}x\,dx \qquad (k=1,2,\cdots).$$

最後，如果條件 $f(a+\lambda)=f(a), f'(a+\lambda)=f'(a)$ 不成立，要想得到上面的展開式，則我們總可以先把函數 $f(x)$ 擴展到端點 $a+\lambda$ 以外的某一點 $b>a+\lambda$ 使得在區間 (a, b) 上滿足所有以上這些條件，然後再用我們剛才所說的方法求出函數 $f(x)$ 在這個擴展後的區間上的展開式。

§ 85 的練習可以參看 Б. П. 捷米多維奇的習題集，第五章，習題 331，356，357。



第五篇　微分學的進一步發展

第二十二章　多元函數的微分法

§86. 多元函數的連續性

在我們初次談到函數關係的概念時(第一章)，我們是把一個自變量 x 的函數 $y=f(x)$ 作爲這個一般概念的最簡單的情形來考慮的。在實際上我們所碰到的各種類型的函數關係中，大部分都須要考慮不止依賴於一個，而且還依賴於若干個(有時很多個)其他的量的那種量，這一個以及其他這若干個量的值都可以任意選取，並且它們之間彼此無關，因而我們可以都稱之爲自變量。只有當我們用某種確定的方法選定了所有這些量的值時，函數才有確定的值。然而，直到現在爲止，我們只專門研究了那種祇有一個自變量的最簡單情形。其實微分學與積分學的那些概念與方法完全可以很自然地推廣到任意多個自變量的函數(簡稱多元函數)，而且這樣一個推廣有着極大的用處。

在這一章裏我們照例祇詳細地研究把微分學的概念和方法推廣到兩個自變量的情形，然後讓讀者們自己證明：當進一步增多自變量的數目時已經不需要什麼在原則上是新的東西了。這樣一個辦法是恰當的，因爲我們以下就會知道，從一個變量的函數轉到兩個變量的函數時，是會出現某些在原則上是新的東西的，爲了要牢固地掌握住這些新東西，我們希望我們能够集中注意在事情的原則方面，而不要分散到過於繁瑣的形式結構中去。相反地，從兩個變量到三個或更多個自變量的過程中，則照例只會引起一些技術性的困難，而這些困難當我們牢固地掌握了事情的原則方面之後是不難克服的。

假定量 u 是兩個自變量 x 與 y 的函數。正如我們以前用直線("數

軸[1])上的點來表示變量 x 的不同的值並且有時直接就稱呼這些值爲"點"那樣，現在我們也時常把自變量 x 與 y 當作是平面上的點的直角坐標，而這個平面也就自然地叫做"數平面"。並且當我們要想說"自變量的一對值 (x, y)"時，我們也常常就簡單地說成"點 (x, y)"，因而當 $x=a, y=b$ 時量 u 的值也就可以說是它"在點 (a, b)"的值。這種術語在下述兩方面給我們很多方便：第一，它在絕大多數情形下使敍述簡單得多(而又具有同樣程度的精確性)；第二，它自然地引起我們的直覺觀念，這種直觀，在許多情形下，都能夠使我們對於所說的東西更易於掌握。有時爲了簡單起見，我們只用一個字母像 $P, Q, \cdots$ 等來記點 (x, y)，並且把 $u=f(x, y)$ 簡寫成 $u=f(P)$。這個方法在兩個自變量的情形用得較少，因爲這時縮寫得不多；但是在自變量個數較多的情形，這個縮寫的好處就非常顯著了。

正如函數 $y=f(x)$ 在直角坐標系 (x, y) 中，以某一條(與平行於 OY 軸的直線最多只交於一點的)曲線作爲其幾何表示一樣，函數 $u=$ $=f(x, y)$ 在直角坐標系 (x, y, u) 中，也以某一個與平行於 OU 軸的直線最多只交於一點的曲面爲其幾何表示(這等於要求對於自變量 x, y 的一對值，量 u 最多只有一個值與之對應)。我們已經看到過，在研究一個變量 x 的函數時幾何表示曾經帶來了多大的方便；類似地在二元函數的理論中，利用三維空間中的曲面來作爲這些函數的幾何表示，可以起同樣的作用。

假定函數 $u=f(x, y)$ 確定在平面的某一個區域❶上又假定 $P(a, b)$ 是這個區域的某一點。除點 P 外，我們考慮另外一點 $P'(x, y)$，設想它無限制地逼近 P，即 $x \to a, y \to b$，這也可以表作下列關係式：

$$\rho=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} \to 0.$$

---

❶ 目前對我們來說，在極大程度上，這個區域的形狀究竟如何是沒有什麼關係的：它可以是正方形、圓或者任何其他有限圖形，或者是"數平面"的一個無限的部分，或者甚至於就是整個數平面。

如果在這個過程中,量 $f(x,y)$ 趨向於某一個極限 A,則我們寫作

$$f(x,y)\to A(\rho\to 0) \quad \text{或} \quad \lim_{\rho\to 0} f(x,y)=A.$$

利用關係式 $\rho\to 0$ 來描述上述的過程最爲簡單。不過我們却應當注意到,我們這裏的極限過程只是那種在 § 15 中已詳細討論過的一般意義之下的極限過程。事實上,$f(x,y)$ 並不是"基本變量" ρ 的函數,因爲,很明顯,到點 P 的距離等於 ρ 的點 $P'(x,y)$ 有無窮多個,而一般說來,函數 $f(x,y)$ 在這些點取各不相同的值。當然,儘管這樣,我們所描述的極限關係還是有完全確定的意義的,那就是:對於無論怎樣小的 $\varepsilon>0$,都有這樣一個 $\delta>0$ 存在,使得對於任何不同於 P 的點 $P'(x,y)$,只要它到 P 的距離小於 δ(也就是只要在唯一條件 $\rho<\delta$ 下),就永遠有

$$|f(x,y)-A|<\varepsilon.$$

在我們以上把二元函數的極限概念弄清楚之後,我們應當怎樣來擴充連續性概念到二元函數情形也就很清楚了。這個概念,正如我們所知,在一元函數情形具有基本重要的意義。

函數 $u=f(x,y)$ **稱爲在點** (x,y) **連續,假如我們有:**

$$\lim_{\rho\to 0} f(x+\Delta x, y+\Delta y)=f(x,y),$$

其中 $\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$。

說得更詳細一點,就是:對於任何 $\varepsilon>0$,都有這樣的 $\delta>0$ 存在,使得只要 $\rho<\delta$,我們就總有

$$|\Delta u|=|f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x,y)|<\varepsilon.$$

我們可以看出來,在這裏,連續性的概念,跟我們以前的情形一樣,也是一個**局部的性質**:一般說來,二元函數可以在一些點連續而在另一些點不連續。跟以前一樣,如果函數 $f(x,y)$ 在數平面的某一個區域的每一點都連續,我們就說它在這個區域上連續。

當我們研究一元函數時,在建立連續函數的重要性質(第五章)之

前，我們曾經先精密地研究了連續統（實數集合）的構造，也就是自變量的值的集合的構造。同樣地，現在我們應當在研究二元函數之前，先詳細地來考慮實數對 (x, y) 的集合的性質。這個集合很自然地就叫做二維的連續統，它的幾何形式就是平面。

到現在爲止我們只討論了兩個自變量的函數（二元函數）。其實，本節中所說的一切都可以很自然地推到任意多個變量的函數的情形，以至於我們只需要簡單地提一下就够了。

如果量 u 是 n 個自變量的函數（n 元函數），則爲了術語上的方便，我們稱全部這些自變量一次所取的值 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是一個 n 維空間的點。我們仍舊把兩個點的對應坐標之差的平方和的平方根叫做該兩點間的距離（當 $n=3$ 時我們就得到普通 3 維空間中兩個點間的距離）。函數 $u=f(x, y, z)$ 在 3 維空間的一個點 (x, y, z) 連續，就是指

$$\Delta u=f(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z)-f(x, y, z)\to 0 \quad (\rho\to 0),$$

其中

$$\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2}$$

（很明顯，我們沒有必要再來敍述當 $n>3$ 時的連續性的定義了）。至於對 n 元函數的進一步研究，同樣地需要來考慮 n 維連續統（卽所有的 n 實數組 $(a_1, a_2 \cdots, a_n)$ 的集合）的性質。

我們介紹讀者們參考 Б. П. 捷米多維奇的習題集第六章中的非常有用的例子：習題44, 45, 55。

§ 87. 二維連續統

在直線上只有一種類型的簡單圖形，那就是區間。但我們談到二維連續統（平面）時，我們一下子就碰到多種多樣的簡單圖形：多角形，圓以及一般地由任何簡單閉曲線所圍成的圖形。我們研究二維連續統時比起研究最簡單的線性（一維）連續統來，需要考慮許多新的東西，絕大部分這種新東西之所以產生，就是由於簡單圖形形式的這種多樣性。

這種簡單的平面圖形的點的總體，我們稱之爲一個區域，如果連圍成這個圖形的閉曲線上的一切點都算作屬於這個區域時，我們就說這個區域是一個閉區域；反之，如果閉曲線上沒有一個點算作屬於這個區域時，我們就說它是一個開區域（無論在那一種情形，這個閉曲線都稱爲它所圍成的區域的邊界）。這裏我們並不除外那種延伸到無窮的區域。例如我們把（開的）半平面 $x>0$，甚至整個數平面，都叫做區域，正像我們以前在特殊情形把（開的）半直線 $x>0$ 或整個數軸都算作是區間一樣。

如果 $P(x, y)$ 是這種區域 D 的一個內點（即不在邊界上的點），則顯然可以使得以 P 爲中心的充分小的圓的一切點都屬於該區域。反之，如果 P 是區域 D 的邊界上的點時，則任何一個以 P 爲中心的圓都必然既包含屬於區域 D 的點又包含不屬於 D 的點。這些性質可以了解作就是區域的內點與邊界點的定義。開區域只由內點組成；閉區域則同時包含內點與邊界點的全體。

在線性連續統的情形，簡單圖形（區間）的度量是由它的長度來刻劃的。在平面的情形，事情就比較要複雜一些：要根據問題的性質來看，有時我們感興趣的是區域的面積，有時又是它的線性度量；這裏後者是用區域的直徑來刻劃的，所謂一個區域的直徑，就是屬於該區域的任何可能的"點對"間的距離的上確界；例如圓的直徑就是它的通常所謂的直徑的長度，矩形的直徑就是它對角線的長度等等。如果這樣一個上確界存在，則我們就說區域是有界的，如果不然，就說是無界的。無界的區域有時也說成它的直徑是 $+\infty$。要想一個區域是有界的，顯然必須，而且僅須，它整個位於某一個圓的內部（正如要想一個線性集合有界，必須而且僅須它整個位於某一個區間內部一樣）。

假定在平面上給定了一個區域 D 與一點 P，又假定 $\rho(P, Q)$ 表示平面上點 P 與點 Q 之間的距離。如果讓 Q 取遍區域 D 的一切可能的點，則一切這種 $\rho(P, Q)$ 作成一個數集合，這個集合有一個確定的下確

界，我們把這個下確界叫做點P到區域D的距離，記作$\rho(P, D)$。

定理 1. 如果點P不屬於閉區域D，則$\rho(P,D)>0$。

證明．假定要是有$\rho(P, D)=0$，則以P點爲中心的無論怎樣小的圓總含有區域D的點。但這不外下述兩種情形之一：

1）每一個足够小的以P爲中心的圓整個屬於區域D，或

2）任何以P爲中心的圓旣含有屬於區域D的點，又含有不屬於區域D的點。

在第一種情形，點P，根據定義，是區域D的內點；而在第二種情形點P是它的邊界點。因爲區域D是閉的，所以不論那種情形點P都要屬於這個區域，但這與定理的假設相抵觸。所以，$\rho(P, D)>0$，而定理1就證明了。

平行於區間套定理(§ 18，引理 1)，我們現在有必要建立一個對應的，關於"閉區域套"的重要定理。我們把以$d_1, d_2, \cdots, d_n, \cdots$爲對應直徑的一串區域$D_1, D_2, \cdots, D_n, \cdots$叫做一個區域套，如果它滿足下列兩個條件：1）$D_{n+1}<D_n (n=1, 2, \cdots)$（卽區域$D_{n+1}$整個包含在區域$D_n$中）；2）$d_n\to 0 (n\to\infty)$。

定理 2. 對於閉區域作成的區域套來說，永遠有唯一的一個點屬於區域套中的每一個區域。

證明．我們用(a_n, b_n)來記區域D_n在OX軸上投影所成的區間，同樣用(c_n, d_n)記它在OY軸上投影的區間。顯然這兩串區間(a_n, b_n) $(n=1, 2, \cdots)$與(c_n, d_n) $(n=1, 2, \cdots)$都是區間套。假定α是所有區間(a_n, b_n)的公共點(根據§ 18 引理1這樣一個點唯一存在)，β是所有區間(c_n, d_n)的公共點。我們要證明點$P(\alpha, \beta)$屬於每一個區域D_n。事實上，如果有一個區域D_k不包含點P，則根據定理1我們將有$\rho(P, D_k)=d>0$。但是當$l>k$時，$D_l\subset D_k$，因而

$$\rho(P, D_l)\geqslant\rho(P, D_k)=d(l\geqslant k). \tag{1}$$

但是另一方面，如果$Q(x, y)$是區域D_l的任意一點，則x與α屬於區

間(a_l, b_l)，又 β 與 y 屬於區間，(c_l, d_l)，所以

$$\rho(P, Q)=\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2}\leqslant\sqrt{(b_l-a_l)^2+(d_l-c_l)^2},$$

從而顯然有

$$\rho(P, D_l)\leqslant\sqrt{(b_l-a_l)^2+(d_l-c_l)^2}. \qquad (2)$$

但是當 $l\to\infty$ 時，$b_l-a_l\to 0$, $d_l-c_l\to 0$，於是根據(2)就有 $\rho(P, D_l)\to 0$，這與不等式(1)發生矛盾，因爲根據(1)對任何 $l\geqslant k$ 都有 $\rho(P, D_l)\geqslant d$。因此點 $P(\alpha, \beta)$屬於每一個區域 D_n。其次，要是有另外一點 P' 也具有同樣的性質，我們假定P與 P' 間的距離等於 ρ，顯然這時每一個區域 D_n 都包含點P與 P'，因而它的直徑就不會小於 ρ。這就與區域 D_n 構成一個區域套的假設矛盾。所以，點P的唯一性也證明了。

現在我們轉來證明"有限覆蓋定理"，這與§18 引理 2 相似。假定我們有一些區域 (D) 所成的某一個(有限或無窮)集合 S，我們說 S 蓋住了某一個區域 Δ，那就是說區域 Δ 的每一個點都是 S 中的至少一個區域D的內點。

定理 3. 如果區域集合S蓋住了一個有界閉區域Δ,則在這個集合中一定可以選出有限個區域來，使這有限個區域組成的集合就已經蓋住了區域 Δ。

證明. 因爲區域 Δ 是有界的，所以它整個包含在某一個正方形 Q 的內部。用直線連接這個正方形的兩雙對邊的中點，把它分成四個相等的正方形。我們稱一個正方形是"正則"的，如果區域 Δ 在這個正方形上的部分不能滿足定理 3 有限覆蓋的要求（正方形完全不包含區域 Δ 的點時不算是正則的)。顯然，定理 3 的結論是說正方形 Q 不是正則的。現在假定相反，假定它是正則的。於是不難看出，在我們分成的四個正方形之中至少有一個也應該是正則的。事實上，如果這四個正方形中的每一個都有有限覆蓋(或者都不包含區域 Δ 的點)，則顯然整個正方形 Q 也就有有限覆蓋了。

假定 Q_1 是正則的四分之一。把它再分成四個相等的正方形，用同

樣的方法我們知道這兩個小正方形中至少又有一個是正則的。這個步驟可以永遠進行下去，並且顯然我們得到一個正方形區域套 Q, Q_1, Q_2, …。假定 P 是所有這些正方形的公共點（根據定理 2 知道這樣一個點是存在的而且是唯一的）。我們首先來證明 P 屬於區域 Δ。事實上，任何一個以 P 爲中心的圓顯然包含整個正方形 Q_n，只要 n 充分大，因而它也就包含區域 Δ 的點。如果這個圓當半徑充分小時整個包含在區域 Δ 內，則 P 是這個區域的內點。如果無論它的半徑怎樣小，這個圓既含有屬於 Δ 的點又含有不屬於 Δ 的點，則點 P 是區域 Δ 的邊界點。因爲區域 Δ 是閉的，所以不管那一種情形，點 P 都屬於 Δ。

但是在這種情形下，根據定理的假設，S 中就至少有一個區域 D 以 P 爲它的內點。因此以 P 點爲中心的每一個充分小的圓都整個屬於這個區域 D。但是這種小圓都包含無窮多個正方形 Q_n，因此，所有這種 Q_n 都被集合 S 中的一個區域 D 蓋住，而另一方面，根據定義它們是正則的，因而又不可能有有限覆蓋。這樣就得到了一個矛盾，這個矛盾證明了我們的假定是不正確的，也就是說正方形 Q 不可能是正則的，因而也就應當有有限覆蓋。這樣定理 3 就證明了。

現在假定 D_1 與 D_2 是兩個彼此沒有公共點的有界閉區域，又假定 P 是區域 D_1 的任意一點。根據定理 1 有以 P 爲中心，它不包含區域 D_2 的點的一個圓存在。假定這個圓的半徑是 $r(P)$。我們把以 P 爲中心 $\frac{1}{2}r(P)$ 爲半徑的圓稱爲點 P 的"專有"圓，並且把區域 D_1 的一切點 P 的專有圓的總體記作 S。因爲 S 蓋住了區域 D_1，所以根據定理 3 可以在 S 中選出一組有限個圓來，這個有限組 S' 已經蓋住了區域 D_1；我們把這個有限組 S' 中的圓的半徑中最小的一個記作 δ。

假定 P_1 與 P_2 是分別屬於區域 D_1 與 D_2 的任意兩個點。點 P_1 一定位於 S' 的某一個圓的內部；假定 P 與 $r=\frac{1}{2}r(P)$ 分別是這個圓的中心與半徑。於是我們首先有 $\rho(P, P_2)>r(P)$（因爲點 P_2 屬於區域 D_2），其次有 $\rho(P, P_1)<r=\frac{1}{2}r(P)$。因此：

$$\rho(P_1, P_2) \geqslant \rho(P, P_2) - \rho(P, P_1) > r(P) - \frac{1}{2} r(P) = \frac{1}{2} r(P) \geqslant \delta.$$

因爲 P_1 是區域 D_1 的任意一點，又 P_2 是區域 D_2 的任意一點，所以我們得到了以下的結論：全部距離 $\rho(P_1, P_2)$作成一個集合，這個集合的下確界是一個正數。這個下確界稱爲區域 D_1 與 D_2 之間的距離，記作 $\rho(D_1, D_2)$，因此，我們已經得到了下述的重要命題。

定理 4. 如果 D_1 與 D_2 是彼此沒有公共點的兩個有界的閉區域，則 $\rho(D_1, D_2) > 0$。

本節中的一切概念以及定理的敘述與證明都可以不經任何本質的改變就類推到任何多維的連續統上去，讀者不難獨立地去驗證這一點。

§ 88. 連續函數的性質

我們現在已經有了足够的基礎來建立多元連續函數的重要性質了。

首先，我們在 §§ 21 與 22 中所證明的關於一元函數的那些定理，對於二元函數也完全有效。在某一點 P 連續的函數經過有理運算的結果依舊在該點連續(在除法的情形只有一個條件：要分母在點 P 不等於零)。關於複合函數的連續性定理應該這樣了解：如果 $z = f(u, v)$，$u = \varphi_1(x, y)$，$v = \varphi_2(x, y)$，又如果函數 φ_1 與 φ_2 在 XY 平面上的點 $P(x, y)$ 連續，而函數 $f(u, v)$ 又在 UV 平面上的點 $u = \varphi_1(x, y)$，$v = \varphi_2(x, y)$ 連續，則函數

$$F(x, y) = f[\varphi_1(x, y), \varphi_2(x, y)]$$

在點 P 連續。用這種方法做成的函數 $F(x, y)$ 稱爲 x, y 的複合函數。

所有這些定理的證明與 § 21 及 § 22 中的對應定理的證明完全類似，因此可以交給讀者自己來處理。

現在我們再往下看二元連續函數的若干重要性質。

定理 1. 在有界閉區域 D 上連續的函數 $f(x, y)$ 在該區域上有界。

這個定理的證明與 § 23 中對應的定理 1 的證明是這樣相似，讀者們可以毫無困難獨立地把它作出來。

定理 2. 在有界閉區域 D 上連續的函數 $f(x, y)$ 在該區域上取到一個最大值與一個最小值。

這個證明又可以讓讀者自己來處理，因爲它與 § 23 中的定理 2 的證明完全相似。

二元函數的一致連續性概念可以跟一元函數的情形完全一樣地建立起來，並且在這裏也同樣具有重大的意義。函數 $f(x, y)$稱爲在區域 D 上一致連續，是指下述條件成立：無論 $\varepsilon>0$ 怎樣小，都有這樣一個 $\delta>0$ 存在，使得對於區域 D 的任何兩個點 P_1 與 P_2，只要它們的距離

$$\rho(P_1, P_2)<\delta,$$

就總有

$$|f(P_1)-f(P_2)|<\varepsilon.$$

跟 § 23 中的定理 5 一樣，我們有下述定理：

定理 3. 在有界閉區域 D 上每一點都連續的函數 $f(x, y)$，在該區域上一致連續。

雖然這個定理的證明與上面提到的 § 23 中的定理5的證明完全相似，但由於它比較複雜所以我們把它完全寫出來。

證明. 假定 P 是區域 D 的任意一點又 ε 是任意一個正數。因爲函數 $f(x, y)$在點 P 連續，所以對於以 P 爲中心，以一個充分小的數 $\rho(P)$ 爲半徑的圓上的任意一點 P'，我們都有：

$$|f(P')-f(P)|<\frac{\varepsilon}{2};$$

因而，只要 P' 與 P'' 是該圓的任意兩點(同時要注意 P' 與 P'' 都屬於區域 D)，我們就有

$$|f(P')-f(P'')|<\varepsilon. \tag{1}$$

對於區域 D 的每一點 P 我們都作這樣一個圓。這些圓的半徑 $\rho(P)$

一般說來當然是彼此不同的。現在我們設想環繞區域D的每一點P,除去我們以上所作的半徑爲$\rho(D)$的圓外,另外有一個半徑爲$\frac{1}{2}\rho(P)$的同心圓。這個圓我們叫做點P的"專有圓"。

因爲區域D的每一點P都有這樣一個專有圓，所以一切這種專有圓的總體S蓋住了區域D。因而根據上節的定理3,應當有這種專有圓的一個有限組C_1、C_2, $\cdots$, C_n同樣蓋住了區域D。假定這些圓C_k以點P_k爲中心,半徑是$\frac{1}{2}\rho(P_k)$。我們把這n個半徑$\frac{1}{2}\rho(P_k)$, $k=1, 2, \cdots, n$,中的最小者記作δ。

現在假定P'與P''是區域D的任意兩點,它們之間的距離

$$\rho(P', P'')<\delta,$$

又假定P'屬於以P_k爲中心,$\frac{1}{2}\rho(P_k)$爲半徑的圓C_k。於是

$$\rho(P', P_k)\leqslant\frac{1}{2}\rho(P_k), \tag{2}$$

同時，由於$\delta\leqslant\frac{1}{2}\rho(P_k)$,所以也有:

$$\rho(P', P'')<\frac{1}{2}\rho(P_k). \tag{3}$$

從(2)與(3)就得出:

$$\rho(P'', P_k)<\rho(P_k),$$

這就表示點P''屬於以P_k爲中心,$\rho(P_k)$爲半徑的圓。又因爲點P'顯然也同樣屬於該圓，所以不等式(1)成立。但ε是任意小的正數，而P'與P''又是區域D的任意兩個距離小於δ的點,所以函數$f(x, y)$在區域D上一致連續,這就是所要證明的。

我們讓讀者來驗證，本節的一切結果連它們的證明在內不需任何本質的改變就可以類推到任何多元的連續函數上去。

§ 89. 偏導數

現在我們要來建立多元函數的微分學，我們一開始還是集中注意

於二元函數的情形。這裏，主要的問題仍舊是估計函數變化速度的問題。不過，甚至於只消看一眼，就已經可以很清楚地看出，在這裏，問題的提法本身就够複雜了。以前，過程的進行是由一個變量 x 的變化來刻劃的，因而只要考慮，當這個變量得到這個或那個改變量時，函數 $y=f(x)$ 變化得多快就成了。但是，現在我們的對象是平面上的點 $P(x,y)$。這個點不僅可以移動任意的距離，而且還可以沿任意的方向來移動這個距離，並且一般說來函數 $u=f(x,y)$ 變化的快慢由於這個點沿着不同的方向移動而不一樣。要想得到問題的完全解決，我們有必要對這整個的複雜情形建立起一個清晰的完整的概念。

但是，在開始的時候，我們只考慮最簡單的情形，即點 P 的兩個坐標 x,y 中只有一個變動而另外一個保持不變的情形，這時點 P 沿着兩個坐標軸方向中的一個而移動。例如假定變量 x 得到一個改變量 Δx，而變量 y 保持不變，於是我們從點 $P(x,y)$ 轉到點 $P'(x+\Delta x,y)$（圖 52）。函數 $u=f(x,y)$ 這時顯然得到改變量

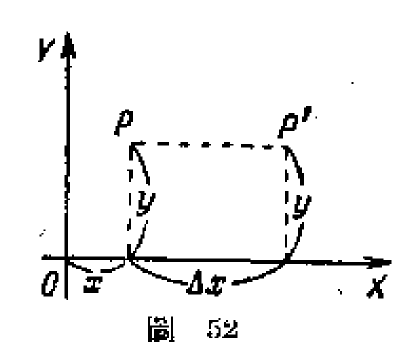


圖 52

$$\Delta u=f(x+\Delta x,y)-f(x,y).$$

於是比式 $\frac{\Delta u}{\Delta x}$ 給出了對於給定的常值 y，函數 u 關於變量 x 在區間 $(x,x+\Delta x)$ 上的平均變化速度。如果當 $\Delta x\to 0$ 時，這個比式的極限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}$$

存在，則我們顯然可以把這個極限考慮作函數 $u=f(x,y)$ 在點 $P(x,y)$ 關於變量 x 的局部變化速度。在這個極限過程中，x 與 y 當然算作是常量，變動的只是 Δx。不過得到的極限值自然是與 x,y 取怎樣的值有關的一個量。一般說來，它在不同的點 (x,y) 有不同的值，因而，跟 u 一樣，也是 x 與 y 的一個函數（所以我們說它是局部的速度）。我們把這

個量稱爲函數 $u=f(x,y)$關於變量 x 的偏導數，記作$\frac{\partial u}{\partial x}$ 或 $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$，也記作 $f'_x(x,y)$。這裏第一種記法中的字母 ∂ 與第二種記法中的附標 x 的用意，都是要說明我們所談到的是關於兩個變量之一(在另一個變量固定不變時)的微分運算。

因此我們有：

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=f'_x(x,y)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}.$$

當然，完全類似的量

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=f'_y(x,y)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}$$

就稱爲函數 $u=f(x,y)$關於變量 y 的偏導數，它代表這個函數關於變量 y 的局部變化速度，顯然這裏談到的量 u 的變化速度是當點 $P(x,y)$ 在 OY 軸方向上移動時的情形。所以，關於在一點 P 的兩個偏導數 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 與 $\frac{\partial u}{\partial y}$ 的知識，給予了我們一種可能性來判斷當點 $P(x,y)$沿這個或那個坐標軸方向變動時，函數 $u=f(x,y)$究竟變化得多快。至於當點 P 沿另外的方向移動時函數變化的速度，則顯然我們還不可能根據偏導數的值就直接判斷出來。

根據以上所述就已經很清楚，當我們要求一個具體給定的函數的偏導數時，是不需要任何新的技術性的方法的；例如要想求 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 時，只要來求函數 $u=f(x,y)$關於 x 的普通的導數就成，這時把 y 看作常量，因而 u 就可以看成是普通的一個變量 x 的函數。

例.
$$u=y^2\sin 3x,\quad \frac{\partial u}{\partial x}=3y^2\cos 3x,$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}=2y\sin 3x.$$

二元函數的偏導數具有簡單的幾何意義。方程 $u=f(x,y)$表示三維空間中的一個曲面。給 y 以任意固定的值，例如 $y=b$，我們集中注意力於這個曲面與平面 $y=b$ 的交線。這個交線是一條平面曲線，它的

方程是

$$u=f(x, b) \tag{1}$$

(圖 53)。在某一點 $P(a, b)$ 的偏導數 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 是函數 $f(x,b)$ 在點 a 關於 x 的普通導數，因而也就是曲線(1)在點 $x=a$ 的切線的斜率(也就是這個切線與 OX 軸的正方向的交角的正切)。當然，$\frac{\partial u}{\partial y}$ 也可以得到完全類似的幾何解釋。

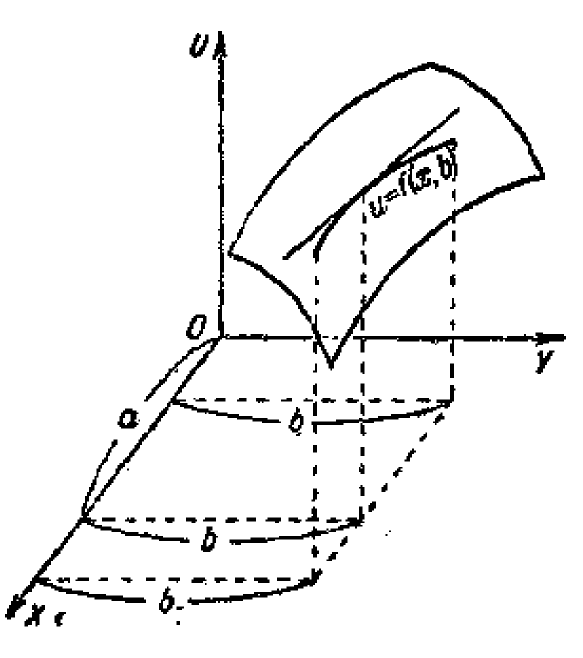


圖 53

三元或更多元的函數的偏導數可以完全一樣地用同樣的方法來確定。例如假定

$$u=f(x, y, z)$$

則

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x, y, z)-f(x, y, z)}{\Delta x};$$

同樣的辦法可以確定 $\frac{\partial u}{\partial y}$ 與 $\frac{\partial u}{\partial z}$。顯然 n 元函數有 n 個不同的偏導數。這些偏導數中的每一個(在 n 維空間中的一個已知點)都表示函數在對應的坐標軸方向的局部變化速度。當然，這個幾何解釋只有在 $n=1, 2, 3$ 時才具有直觀性。

本節不要求大量的練習。讀者可以在 Б. П. 捷米多維奇的習題集第六章的習題 66—81 中解出 5—6 個就行了。

§ 90. 微分

當我們研究一元函數 $y=f(x)$ 時，對應於自變量從 x 到任何新值 $x+\Delta x$ 的改變，我們曾經確定了一個量 dy，稱爲函數 y 關於 x 的這一改變的微分。微分 dy 的定義是 $f'(x)$ 與 Δx 的乘積 $f'(x)\Delta x$，它具有下

述的兩個性質：1）它與點 x 的改變量成比例，2）當 $\Delta x\to 0$ 時它與函數 y 的改變量 $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$ 相差一個比 Δx 高級的無窮小量。微分的許多應用都基於這兩個性質。我們還知道，這兩個性質完全刻劃了函數 y 的微分，換句話說，不可能有任何其他不同於 dy 的量也同樣具有這兩個性質。

當我們現在來研究二元函數 $u=f(x,y)$ 時，我們也希望來造出一個具有類似性質的量。假定我們考慮一個給定的點 $P(x,y)$ 以及任何其他一點 $P'(x+\Delta x,y+\Delta y)$。用 $\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$ 來記這兩個點間的距離。對應於從點 P 到點 P' 的過程（改變），我們要來造出一個量，使它對於函數 $u=f(x,y)$ 所起的作用，跟微分對一元函數所起的作用一樣。因爲在一元函數的情形，函數的微分的形狀是 $A\Delta x$，其中 A 與 Δx 無關（但一般說來，當然與 x 有關），所以我們現在很自然地要求量 du 是改變量 Δx 與 Δy 的線性組合，也就是說，是下面這種形狀：

$$du=A\Delta x+B\Delta y, \tag{1}$$

其中 A 與 B 跟 Δx 或 Δy 都沒有關係（一般說來當然與 x, y 有關）。這個要求顯然相當於上面所說的微分的第一個性質。它的第二個性質是：函數的微分與函數的改變量之差是一個比自變量的改變量高級的無窮小量，在以前，自變量的改變量是用 $|\Delta x|$ 來度量的，現在在二元函數的情形，就應該用 P 與 P' 之間的距離 $\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$ 來度量。因此我們很自然地要求：對於從 P 到 P' 的過程，函數 $u=f(x,y)$ 的微分 du 與它的改變量 $\Delta u=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)$ 相差一個比 ρ 高級的無窮小量。

如果採用下述定義，我們就可以把這兩個要求揉合起來。

函數 $u=f(x,y)$ 在點 $P(x,y)$ 的微分 du 是一個形如（1）式的表達式，其中 A 與 B 跟 Δx 與 Δy 都無關，又當 $\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}\to 0$ 時

$$\Delta u-du=o(\rho), \tag{2}$$

（2）式中的 Δu 是函數 u 從點 $P(x,y)$ 轉移到點 $P'(x+\Delta x,y+\Delta y)$ 時所

得到的改變量。

當然，從這個定義我們不僅不能够立刻知道係數 A 與 B 的形式如何，而且也看不出來對於給定的函數 $u=f(x, y)$，微分是否存在以及如果存在的話是否是唯一的。我們以下就要來研究這些問題。

定理 1. 如果函數 $u=f(x, y)$ 在點 $P(x, y)$ 有微分(1)，則在該點兩個偏導數 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 與 $\frac{\partial u}{\partial y}$ 一定存在，並且 $A=\frac{\partial u}{\partial x}$，$B=\frac{\partial u}{\partial y}$，因而有

$$du=\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial u}{\partial y}\Delta y.$$

證明. 假定我們給量 x 一個改變量 Δx，而量 y 保持不變($\Delta y=0$)，換句話說，讓點 P 在 Ox 軸的方向上移動；於是 $du=A\Delta x$，從而

$$\Delta u=du+o(\rho)=A\Delta x+o(|\Delta x|),$$

因為這時顯然 $\rho=|\Delta x|$。由此可見

$$\frac{\Delta u}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x, y)-f(x, y)}{\Delta x}=A+\frac{o(|\Delta x|)}{\Delta x}=A+o(1).$$

當 $\Delta x\to 0$ 時上式右端的極限是 A。因而上式左端的極限存在而且也等於 A。換句話說，$\frac{\partial u}{\partial x}$ 存在而且等於 A。完全類似地，可以證明 $\frac{\partial u}{\partial y}$ 存在而且等於 B。所以定理 1 就證明了。

從定理 1 顯然可推出微分的唯一性。

跟一元函數的情形一樣，定理 1 指出了從微分的存在可得出偏導數 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 與 $\frac{\partial u}{\partial y}$ 的存在。但是在一元函數的情形逆定理也成立：從導數的存在可以推出微分的存在。所以在那裏我們既可以把函數的可微性概念定義作導數的存在，也可以定義作微分的存在，這兩個定義彼此是等價的。當然，這就使得我們對二元函數也提出類似的問題：假定函數 $u=f(x, y)$ 在點 P 的兩個偏導數 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 與 $\frac{\partial u}{\partial y}$ 都存在；是否由此就可以推出在該點的微分 du 也存在呢？不難預料到這不一定是可能的。因為如果說在一元函數的情形，導數已經能够完全刻劃出函數的變化速度，那末在我們的新的情形下，$\frac{\partial u}{\partial x}$ 與 $\frac{\partial u}{\partial y}$ 不過只是在無窮多個可能的

方向中的兩個方向上來確定這個變化速度，因而它們對於函數的變化情形的刻劃，還只能是極端不完備的。

不難驗證，在一個已知點偏導數的存在，一般說來，還不能確定微分的存在。例如，我們來考慮函數 $u=f(x,y)=\sqrt{|xy|}$ 在點$(0,0)$鄰近的情形。因爲在 OX 軸與 OY 軸上 u 處處爲零，所以在點$(0,0)$有 $\frac{\partial u}{\partial x}=0$, $\frac{\partial u}{\partial y}=0$。如果在該點函數 u 有微分，則根據定理 1 對於任意的 Δx 與 Δy，我們都應該有：

$$du=0.$$

於是根據(2)應有 $\Delta u=o(\rho)$。但是如果我們取 $\Delta x=\Delta y>0$，則我們有：

$$\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}=\Delta x\sqrt{2},\quad \Delta u=f(\Delta x,\Delta x)-f(0,0)=\Delta x.$$

而當 $\Delta x\to 0$ 時，改變量 Δu 與 ρ 是同級的無窮小量。因而我們得到了一個矛盾，這就證明了儘管兩個偏導數都存在，但函數 u 在點$(0,0)$却沒有微分。

所以，一般說來，在二元函數的情形，保證在一個已知點微分存在的條件要比偏導數存在的條件強一些。不過，話又說回來，這種偏導數存在而微分不存在的情形，無論如何，是比較不常見的。這可以從下面的定理 2 看出來，虧得這個定理，我們對實際上碰到的絕大多數情形，才有了斷定它的微分存在的把握。

定理 2. 如果在點(x,y)函數 $u=f(x,y)$的偏導數 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 與 $\frac{\partial u}{\partial y}$ 存在而且連續，則在該點函數有微分。

當然，函數 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 與 $\frac{\partial u}{\partial y}$ 在點(x,y)的連續性，是以它們在該點的鄰域內（在以(x,y)爲中心充分小半徑的圓內）存在爲前提的，因爲否則這兩個函數在點(x,y)的連續性就沒有意義了。

證明. 令 $\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$, $du=\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial u}{\partial y}\Delta y$，我們應當證明當 $\rho\to 0$ 時

$$\Delta u-du=o(\rho).$$

我們有

$$\Delta u = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y) =$$

$$= f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y) + f(x, y+\Delta y) - f(x, y). \quad (3)$$

這個等式的右端是兩個差之和。我們先考慮第一個差。這個差的兩項中的第二個變量都有同一個值 $y+\Delta y$。因此我們可以把這個差看作一個只以 x 爲變量的一元函數的改變量，它對應於自變量的改變量 Δx，如果 $|\Delta x|$ 與 $|\Delta y|$ 都充分小，則這個函數在區間 $(x, x+\Delta x)$ 的每一個點都有導數，這個導數不是別的，就是函數 u 關於 x 的偏導數，它在點 (x, y) 的一個充分小的鄰域內存在是我們預先假定了的。因此我們可以對它應用有限改變量定理(§ 36)，因而可以寫成：

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y) = f'_x(x+\theta_1\Delta x, y+\Delta y)\Delta x,$$

其中 $0<\theta_1<1$。對於等式(3)右邊的第二個差我們完全類似地可以得到

$$f(x, y+\Delta y) - f(x, y) = f'_y(x, y+\theta_2 y)\Delta y,$$

其中 $0<\theta_2<1$。因此等式(3)就成爲：

$$\Delta u = f'_x(x+\theta_1\Delta x, y+\Delta y)\Delta x + f'_y(x, y+\theta_2\Delta y)\Delta y,$$

從而

$$\Delta u - du = [f'_x(x+\theta_1\Delta x, y+\Delta y) - f'_x(x, y)]\Delta x +$$

$$+ [f'_y(x, y+\theta_2\Delta y) - f'_y(x, y)]\Delta y,$$

又因爲顯然有

$$|\Delta x| \leqslant \rho, \quad |\Delta y| \leqslant \rho,$$

所以

$$\frac{|\Delta u - du|}{\rho} \leqslant |f'_x(x+\theta_1\Delta x, y+\Delta y) - f'_x(x, y)| +$$

$$+ |f'_y(x, y+\theta_2\Delta y) - f'_y(x, y)|.$$

因爲函數 $f'_x(x, y)$ 與 $f'_y(x, y)$ 在點 (x, y) 連續，所以當 $\rho\to 0$ 時，上式右端的兩項都趨向於零。因而我們有：

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{\Delta u - du}{\rho}=0,$$

或者，另外一個寫法：

$$\Delta u = du + o(\rho).$$

這也就證明了 $du=\dfrac{\partial u}{\partial x}\Delta x+\dfrac{\partial u}{\partial y}\Delta y$ 的確是函數 u 在點 (x, y) 的微分。

我們再提出以下的附註。在特別情形，如果我們有

$$u=f(x, y)=x,$$

則

$$\frac{\partial u}{\partial x}=1,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=0,$$

因而

$$du=dx=\Delta x.$$

同樣考慮函數 $u=y$, 我們可以知道 $dy=\Delta y$。因此，在這裏，跟我們以前的情形完全一樣，對於自變量來說，改變量與微分完全是一回事。因此，如果函數 u 的微分存在，則我們可以把它寫成：

$$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy.$$

由於在二元函數的情形，一般說來，微分的存在並不等價於偏導數的存在，因此，很自然地會提出如下的問題：究竟在那一個條件下我們說二元函數在一個已知點"可微"才合理呢？在某種程度上，這個問題的回答已經在我們迄今所知道的一切中有了暗示。我們知道，微分給我們刻劃出函數在已知點沿任何方向改變時的變化狀態，而偏導數却只告訴我們當該點在兩個完全確定了的（相互垂直的）方向上改變時的情形（特別來說，只要坐標軸圍繞已知點來一個簡單的旋轉，偏導數的存在性顯然就可能消失掉）。因此，爲了符合於事實起見，很自然地，我們應該說函數 $f(x, y)$ 只有在**微分存在**的那些點才是**可微的**，而偏導數存在則是不够的。這樣來定義可微性的合理性將一再地在以後，特別在下一節（§ 91）中，被證明爲無可非議。

微分的概念以及它的一切性質，可以不經任何主要的改變就類推到三個或三個以上變量的情形。例如在函數 $u=f(x, y, z)$ 的情形，我們定義它在點(x, y, z)的微分 du 是一個如下形狀的表達式：

$$du=A\Delta x+B\Delta y+C\Delta z,$$

其中 A, B 與 C 不依賴於 $\Delta x, \Delta y$ 與 Δz，而且滿足條件：$\Delta u-du=o(\rho)$ $(\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2}\to 0)$。跟上面一樣，我們不難證明當微分存在時，一定有 $A=\frac{\partial u}{\partial x}$, $B=\frac{\partial u}{\partial y}$, $C=\frac{\partial u}{\partial z}$。特別是可以得到 $dx=\Delta x, dy=$ $=\Delta y, dz=\Delta z$，因而有

$$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz.$$

在點 (x, y, z) 有微分的函數 u 稱爲在該點是**可微的**。函數 u 在點(x, y, z)的偏導數存在還不能保證它在該點的可微性。但是，假如在點(x, y, z)的三個偏導數都**連續**，則函數 u 在該點就可微了。

§ 90 的練習，讀者可以在 Б. П. 捷米多維奇的習題集，第六章，習題 96a, 97a, 104 中找到。

§ 91. 沿任何方向的導數

我們已經不止一次地提到過：二元函數的偏導數只告訴了我們它在坐標軸方向的變化速度。這兩個方向，一般說來，在所有可能的其他方向中並沒有什麼特別的地方。因此我們現在有必要來考慮函數 $u=f(x, y)$ 當點 (x, y) 在任何方向上變動時的變化速度問題。

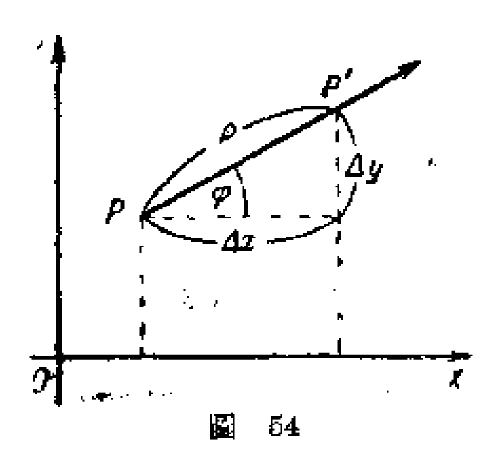


圖 54

過點 $P(x, y)$ 引一條半直線與 OX 軸的正方向做成一個任意的角度 φ (圖54)，我們把注意從點 $P(x, y)$ 轉移到該半直線上的任意一點 $P'(x+\Delta x, y+\Delta y)$ 去。點 P 與 P' 間的距離 ρ 顯然等於 $\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$。

把函數在從點P到P'的過程中的改變量$\Delta u=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)$除以這兩點間的距離$\rho$，我們就得到一個量，它自然可以看作是函數在這個過程中變化的平均速度。如果當$\rho\to 0$時這個平均速度趨向於某一個極限，則這個極限自然可以看作是函數在該點沿我們所引的半直線的方向(以後爲了簡單起見我們就說是在"方向φ")的(局部)變化速度。這個極限，如果存在的話，我們稱之爲函數$u=f(x,y)$在已知點(x,y)沿**方向**φ**的導數**並且用$D_\varphi u$或$D_\varphi f(x,y)$來記它(在這種記法有必要的時候)。因此，

$$D_\varphi f(x,y)=\lim_{\rho\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\rho},$$

其中$\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$，又$\Delta x$與$\Delta y$必需這樣變化：要永遠使得點$(x+\Delta x, y+\Delta y)$是在我們所引的方向$\varphi$的半直線上(爲此，顯然必須而且僅須$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\operatorname{tg}\varphi$永遠成立)。很明顯，偏導數$\frac{\partial u}{\partial x}$是$D_0 u$與$-D_\pi u$當它們彼此相等時的公共值。同樣$\frac{\partial u}{\partial y}$是$D_{\frac{\pi}{2}}u$與$-D_{\frac{3\pi}{2}}u$當它們彼此相等時的公共值。

現在我們假定函數$u=f(x,y)$在點(x,y)是可微的，換句話說，有微分存在，我們知道它一定等於

$$du=\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial u}{\partial y}\Delta y,$$

並且在從點P到點P'的過程中

$$\Delta u=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)=du+o(\rho).$$

於是我們得到

$$\frac{\Delta u}{\rho}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\Delta x}{\rho}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\Delta y}{\rho}+\frac{o(\rho)}{\rho}.$$

因爲$\Delta x=\rho\cos\varphi$, $\Delta y=\rho\sin\varphi$(參看圖 54)，上式也就是

$$\frac{\Delta u}{\rho}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\varphi+\frac{\partial u}{\partial y}\sin\varphi+\frac{o(\rho)}{\rho}.$$

當點P'沿方向φ無限逼近點P時，也就是說，當$\rho\to 0$時，上式右

端的前兩項保持不變，而第三項趨向於零。因此我們得到：

$$D_\varphi u=\lim_{\rho\to 0}\frac{\Delta u}{\rho}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\varphi+\frac{\partial u}{\partial y}\sin\varphi.$$

這樣一來，我們就證明了下面的定理1，它顯然着重指出了我們採用的二元函數的可微性定義是十分合理的。

定理 1. 如果函數 $u=f(x, y)$ 在點 P 是可微的，則它在該點有沿任何方向 φ 的導數，並且

$$D_\varphi u=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\varphi+\frac{\partial u}{\partial y}\sin\varphi.$$

這樣我們就看到了，對於可微函數來說，只要知道了偏導數（也就是沿兩個相互垂直的方向的導數），就可以不用任何計算直接寫出沿任何方向的導數來。

因爲當一個已知方向轉變成正好相反的方向時（即從 φ 轉變到 $\varphi+\pi$），$\cos\varphi$ 與 $\sin\varphi$ 都變一個符號，所以對於任何方向 φ 我們都有：

$$D_{\varphi+\pi}(u)=-D_\varphi(u),$$

換句話說，沿兩個彼此正好相反的方向的導數，絕對值相等而符號相反。對於沿坐標軸方向的導數來說，我們已經在前面知道了這一點。

現在我們來對三元函數 $u=f(x, y, z)$ 考慮類似的問題。通過點 $P(x, y, z)$ 引一條半直線與坐標軸的正方向分別做成角 α, β 與 γ，在這條半直線上任取一點 $P'(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z)$。我們把點 P 與 P' 間的距離記作

$$\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2}.$$

顯然，我們有

$$\Delta x=\rho\cos\alpha,\quad \Delta y=\rho\cos\beta,\quad \Delta z=\rho\cos\gamma.$$

現在假定函數 u 在點 (x, y, z) 是可微的，於是當 $\rho\to 0$ 時

$$\Delta u=f(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z)-f(x, y, z)=$$

$$=\frac{\partial f}{\partial x}\rho\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\rho\cos\beta+\frac{\partial f}{\partial z}\rho\cos\gamma+o(\rho).$$

如果我們讓點 P' 沿上述半直線無限制地逼近點 P，則我們有 $\rho\to 0$，而同時角度 α,β 與 γ 則保持不變。因此我們得到

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{\Delta u}{\rho}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma.$$

—— 這個極限，也跟二元函數的情形一樣，顯然刻劃出函數 u，當點 P 在所取的（即由角度 α,β 與 γ 決定的）方向上移動時，在點 $P(x,y,z)$ 的局部變化速度。因此我們這裏也把這個極限稱爲函數 u 在給定的方向上的導數，記作 Du。所以，**如果函數** $u=f(x,y,z)$ **在點** P **可微，則它在該點有沿任何方向**(α,β,γ)**的導數** Du，**並且**

$$Du=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma. \tag{1}$$

§ 91 的練習可以參看捷米多維奇的習題集，第六章，習題198, 199, 201。

§ 92. 複合函數與隱函數的微分法

我們現在要考慮兩個問題，這兩個問題中談到的只是一元函數的普通微分法，不過，在以前我們還不能研究這些問題，因爲它們的解決需要多元函數微分法的知識。

1. 假定 $u=f(x,y)$ 是 x,y 兩個變量的函數，但是這兩個變量都不是自變量，而是同一個新的變量 t 的函數：$x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$。於是

$$u=f[\varphi(t),\psi(t)]$$

是 t 的一個複合函數。我們的問題是：已經知道了偏導數 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 與 $\frac{\partial u}{\partial y}$ 以及導數 $\frac{dx}{dt}=\varphi'(t)$ 與 $\frac{dy}{dt}=\psi'(t)$，要來求量 u 關於自變量 t 的導數 $\frac{du}{dt}$，這裏，導數 $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$ 的存在都是我們問題的假設，只有導數 $\frac{du}{dt}$ 的存在是應當證明的。關於函數 $f(x,y)$ 我們假定它在點 $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ 不僅有偏導數而且有微分。

對應於量 t 的一個改變量 Δt，量 x 與 y 分別有改變量 Δx 與 Δy，而

$\Delta x, \Delta y$ 又引起量 u 的一個改變量 Δu。令 $\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$。於是，如我們所知，

$$\Delta u=du+o(\rho)=\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial u}{\partial y}\Delta y+\alpha\rho,$$

其中 $\alpha\to 0\ (\rho\to 0)$。由此我們有：

$$\frac{\Delta u}{\Delta t}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\Delta x}{\Delta t}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\Delta y}{\Delta t}\pm\alpha\sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2+\left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2}. \tag{1}$$

現在讓 $\Delta t\to 0$。於是 $\Delta x\to 0,\ \Delta y\to 0$（因為 x 與 y 是可微的，從而是連續的）。從而 $\rho\to 0$，也就說明 $\alpha\to 0$。但另一方面，因為當 $\Delta t\to 0$ 時導數 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 與 $\frac{\partial u}{\partial y}$ 是固定的而比式 $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ 與 $\frac{\Delta y}{\Delta t}$ 分別有極限 $\frac{dx}{dt}=\varphi'(t)$ 與 $\frac{dy}{dt}=\psi'(t)$，所以關係式(1)的右端當 $\Delta t\to 0$ 時有極限值

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt}.$$

這就證明了 $\frac{du}{dt}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta t}$ 存在，並且

$$\frac{du}{dt}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt}. \tag{2}$$

這個簡單的公式顯然完全解答了我們所提出的問題。

值得特別注意的，是時常會碰到的 $x=\varphi(t)=t$ 的情形，也就是新變量 t 與舊變量之一相合的情形。這說明我們所給定的量 u 是變量 x 與 y 的函數，其中 x 是自變量而 $y=\psi(x)$ 是 x 的一個已知函數，即 $u=f[x,\psi(x)]$。在公式(2)中令 $dt=dx$，我們就得到

$$\frac{du}{dx}=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dx}. \tag{3}$$

上式的左右兩端的第一項都是函數 u 關於自變量 x 的導數。然而這兩個導數並不一樣，因為它們是在不同的假設下求出來的。$\frac{\partial u}{\partial x}$ 是 u 關於 x 的**偏導數**，換句話說，是在假定了量 y 不變的情形下計算出來的。反之，$\frac{du}{dx}$ 則是 u 關於 x 的"全"導數，它是在假定了量 $y=\psi(x)$ 當 x 變

化時以完全確定的方式變化着的情形下計算出來的。公式(3)很清楚地指出了，對於偏導數與全導數要使用不同的記號是完全必要的。

例. $u=\frac{y}{x}$, $y=\sqrt{1-x^2}$;

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{y}{x^2},\ \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{x};\ \frac{dy}{dx}=-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}=-\frac{x}{y};$$

根據公式(3)我們有

$$\frac{du}{dx}=-\frac{y}{x^2}-\frac{1}{x}\frac{x}{y}=-\frac{x^2+y^2}{x^2y}=-\frac{1}{x^2\sqrt{1-x^2}}.$$

當 u 是任意多個變量的可微函數，而每一個變量又都是 t 的可微函數時，求導數 $\frac{du}{dt}$ 的問題，可以用完全類似的方法來解決。例如當 $u=f(x,y,z)$, 而 $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, $z=\chi(t)$, 我們可以求出：

$$\frac{du}{dt}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{dz}{dt}=\frac{\partial u}{\partial x}\varphi'(t)+\frac{\partial u}{\partial y}\psi'(t)+\frac{\partial u}{\partial z}\chi'(t).\quad(4)$$

讀者不難像證明公式(2)一樣，自己來證明這個關係式(4)。

到現在爲止，在我們以上所考慮的一切情形中都是以一個自變量作爲問題的基礎(這個變量我們是用 t 來記的)。但是在應用中我們時常會碰到多個自變量的情形。例如，假定跟以前一樣，我們還是有 $u=f(x,y)$, 但是這一次假定 x 與 y 都是二元函數：$x=\varphi(t,s)$, $y=$ $=\psi(t,s)$。

於是
$$u=f[\varphi(t,s),\psi(t,s)]$$
也就成爲變量 t 與 s 的一個二元函數。在這種情形我們也把 u 叫做一個複合函數。問題是在於已經知道了函數 $f(x,y)$ 關於 x 和 y 的偏導數以及函數 $\varphi(t,s)$ 與 $\psi(t,s)$ 關於 t 和 s 的偏導數時，要來求量 u 關於 t 和 s 的偏導數。因爲偏微分法與普通的微分法並沒有什麼分別(在某種確定的條件下來進行的話)，所以這個問題當然不需要什麼新的考慮。它可以用類似於公式(2)的關係式來加以解決：

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t},$$

$$\frac{\partial u}{\partial s}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}.$$

对于中間函数的数目或自变量的数目大于2的情形，我們也可以得到类似的結果。

2. 現在我們来考虑第二个問題。假定給定了任意一个有两个变量的方程

$$F(x,y)=0. \tag{5}$$

一般說来，它可以确定一个或几个（自变量 x 的）函数 y[1]。例如方程

$$xy-2x+3y-1=0$$

就确定一个函数

$$y=\frac{2x+1}{x+3},$$

而方程

$$x^2+y^2-1=0$$

则可以确定两个函数

$$y=+\sqrt{1-x^2},\quad y=-\sqrt{1-x^2}.$$[2]

在很多情形下，由給定的方程(5)所确定的函数不可能像我們所举的两个簡單例子那样用 x 的初等函数来表达。但不管能不能这样表达，只要在 x 的值的某一个范圍内，恒等地滿足方程(5)的每一个函数 $y=f(x)$ 都称为是由这个方程所确定的**隱函数**。我們的問題是要来求这种隱函数的导数。

假定 $y=f(x)$ 是由方程(5)确定的一个隱函数。于是对于某一个范圍內的任何 x，我們都有：

---

[1] 要这件事情成立的条件將在第二十四章里詳細地加以研究。

[2] 严格地說，这二个函数是在限制了給定方程解的連續性条件下得到的。滿足給定方程的不連續之函数有無穷多个。例如任一下列形式之函数皆是它的解：

$$y=\begin{cases}-\sqrt{1-x^2} & (-1\leqslant x\leqslant \alpha),\\ +\sqrt{1-x^2} & (\alpha<x\leqslant 1),\end{cases}$$

这里 α 是 -1 与 1 間的任一数。給定方程的一般解可以表成形式 $y=\psi(x)\sqrt{1-x^2}$，这里取 $\sqrt{1-x^2}\geqslant 0$，而 $\psi(x)$ 为任一只取值 1 与 -1 的函数。

$$F[x, f(x)]=0.$$

因而对于这个范圍內的任何 x，都有：

$$\frac{dF[x, f(x)]}{dx}=0.$$

現在假定函数 $F(x, y)$ 与 $f(x)$ 都是可微的。于是公式(3)給出

$$\frac{dF[x, f(x)]}{dx}=\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx}.$$

因而就在上述范圍內，关于 $y=f(x)$，我們有

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx}=0,$$

由此可見

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} \tag{6}$$

$\left(当然，要 \frac{\partial F}{\partial y}\neq 0\right)$。

这个公式解决了我們所提出的問題。不过关于这个解答，我們还有必要作如下的解釋。最初看来也許会覺得奇怪，好像我們甚至还不会"明显地"表达出函数 y 本身(換句話說，从方程(5)解出 y)，就公然已經能够求出导数 $\frac{dy}{dx}$ 的"明显"的表达式(6)了。其实要知道所謂从方程(5)解出 y，是說要通过 x 用某种初等公式来表出 y。如果我們对函数 y 本身不能做到这一点，而在一切情形下对它的导数 $\frac{dy}{dx}$ 却可以解决这同样的問題的話，那就眞是怪事了。其实公式(6)根本沒有对 $\frac{dy}{dx}$ 給出这样的表达式。因为 $\frac{\partial F}{\partial x}$ 与 $\frac{\partial F}{\partial y}$ 我們是作为兩个变量 x 与 y 的函数給出的，所以公式(6)表出的导数 $\frac{dy}{dx}$ 也是这兩个变量的函数。因此如果我們不能用 x 明显地表出函数 y，那末公式(6)也就不可能給出这个函数的导数关于 x 的明显表达式来。

不过，尽管这样，由于公式(6)建立了隱函数的导数与确定这个隱函数的二元函数的偏导数之間的关系，所以它具有很大的理論价值并且有一系列的重要应用；关于这一点，我們以下就会談到一些。

例. 假定 y 由下述方程確定為 x 的隱函數:

$$F(x,y)=xy^5-x^5y-2=0.$$

我們有:

$$\frac{\partial F}{\partial x}=y^5-5x^4y,\quad \frac{\partial F}{\partial y}=5xy^4-x^5,$$

因而公式(6)給出

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{y(y^4-5x^4)}{x(5y^4-x^4)}.$$

§ 92 的練習可以參看 Б. П. 捷米多維奇的習題集，第六章，習題 137—139, 223—226, 229, 231。

§ 93. 齊次函數與尤拉定理

如所周知,兩個變量的多項式 $P(x,y)$ 稱為是**齊次的**，是指它的每一項(關於 x 與 y)的指數和都等於同一個值 k。這時 k 就稱為這個多項式的**齊性次數**。例如多項式

$$ax^3+bx^2y+cxy^2+dy^3$$

對於任何係數 a,b,c,d 都是一個三次的齊次多項式。

如果 $P(x,y)$ 是一個 k 次的齊次多項式,則顯然對於任何 t (也對於任何 x,y)我們都有

$$P(tx,ty)=t^kP(x,y).$$

齊次多項式的這一個性質可以作為擴充函數齊次性概念的基礎，這種擴充是很有用的。一般我們稱一個函數 $f(x,y)$ 是一個 **k 次的齊次函數**,如果它能够恆等地(卽對於任何 x,y,t)滿足關係式

$$f(tx,ty)=t^kf(x,y). \tag{1}$$

跟多項式的情形有所不同,這裏的指數 k 可以是任何實數。不言而喻,這時 t 所取的值應當使得 t^k 有確定的意義。例如當 $k<0$, 我們應有 $t\neq 0$; 當 $k=\frac{1}{2}$, 我們應取 $t\geqslant 0$ 等等。

例. $\frac{x^2+y^2}{x+y}$, $\frac{x-y}{x+y}$, $\frac{x+y}{x^2+y^2}$都是齊次函數，它們的次數分別等於1, 0, -1。

關於齊次函數的偏導數尤拉發現了一個非常簡單，而且應用起來非常便利的公式。假定$f(x, y)$是一個k次的齊次函數。在(1)式中，如果把量x與y都看作常量，而把t看作變量，則這個等式的兩端都是t的函數。於是我們可以把恆等式(1)關於t進行微分。(1)式左端顯然是t的一個複合函數，它的導數可以根據 §92 公式(2)來求：令$tx=u, ty=v$, 我們求得：

$$\frac{df(u,v)}{dt}=\frac{\partial f(u,v)}{\partial u}\frac{du}{dt}+\frac{\partial f(u,v)}{\partial v}\frac{dv}{dt}=$$
$$=x\frac{\partial f(u,v)}{\partial u}+y\frac{\partial f(u,v)}{\partial v}.$$

又(1)式右端的導數則等於$kt^{k-1}f(x, y)$。這樣得到的兩個導數當然對任何x, y, t都相等。特別令$t=1$, 則$u=x, v=y$, 我們就得到：

$$x\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}+y\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=kf(x,y).$$

這就是尤拉公式。對於任意多元的齊次函數，不難用同樣的方法建立起類似的關係式。我們只敍述一下三元函數的情形。

函數$f(x, y, z)$稱為一個k次的齊次函數，只要它能恆等地滿足下列關係式：

$$f(tx, ty, tz)=t^k f(x, y, z).$$

對於這種函數，只要它可微，就有

$$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}+z\frac{\partial f}{\partial z}=kf.$$

本節練習可以參看 Б. П. 捷米多維奇的習題集，第六章，習題93。

§ 94. 高級偏導數

函數$u=f(x, y)$的偏導數$\frac{\partial u}{\partial x}$與$\frac{\partial u}{\partial y}$, 跟$u$一樣，也是變量$x$與$y$的

函數。因此對它們可以繼續施行關於 x 或 y 的偏微分運算。函數 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 與 $\frac{\partial u}{\partial y}$ 關於 x 或 y 的偏導數，稱爲原來函數 u 的二級的導數。從 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 與 $\frac{\partial u}{\partial y}$ 中的每一個出發都可以得到兩個二級導數，所以我們一共得到四個二級導數，我們通常把這四個導數記作:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f''_{xx}(x,y),$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=f''_{xy}(x,y),$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}=f''_{yx}(x,y),$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=f''_{yy}(x,y).$$

這四個二級偏導數又都是 x 與 y 的函數，因而又可以有關於這兩個變量的偏導數，我們把這些導數都稱爲函數 u 的三級偏導數。無須特別解釋，三級導數的記法可以與二級的情形完全同樣處理。例如

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial y}=f'''_{xxy}(x,y)$$

表示把函數 $u=f(x,y)$ 先關於 x 微分兩次之後，第三次再關於 y 進行微分所得到的函數。一般來說，n 級導數中的任何一個的一級偏導數都是函數 u 的 $n+1$ 級偏導數，並且有像我們剛才那樣的相應的記法。顯然，二元函數的三級導數的個數是八，而一般 n 級導數的個數等於 2^n。在精確的自然科學的數學工具中高級偏導數的用處很廣；特別在數學物理中有許多重要的應用。

高級偏導數具有一個非常重要的性質，它使得高級偏導數的總體變成非常容易考察，並且有力地簡化了它們公式中的許多關係。這個性質是這樣的：如果兩個同一級的偏導數之間只有進行微分的次序不同，則只要這兩個導數都連續，它們就一定彼此相等。

我們先來看看二級導數的情形。函數 $f''_{xy}(x,y)$ 與 $f''_{yx}(x,y)$ 都是

從函數 $u=f(x,y)$ 經過兩次微分得到的。而且進行的兩次微分，都是一次關於 x 另一次關於 y。所有的區別僅在於進行微分的次序不一樣。我們來證明：如果在某一點 (x,y) 函數 f''_{xy} 與 f''_{yx} 都連續，則一定有：

$$f''_{xy}(x,y)=f''_{yx}(x,y).$$

要證明這個等式，我們考慮下列表達式：

$$\Delta=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x+\Delta x,y)-f(x,y+\Delta y)+f(x,y).$$

對於固定的 y 與 Δy，令

$$f(x,y+\Delta y)-f(x,y)=\varphi(x),$$

顯然我們可以把 Δ 寫成

$$\Delta=\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x). \tag{1}$$

從函數 f 的二級導數的存在，可以推出它的一級導數在點 (x,y) 的某一個鄰域內存在。因此，只要 Δx 與 Δy 充分小時，函數 $\varphi(x)$ 就在區間 $(x,x+\Delta x)$ 上可微。應用有限改變量定理到公式(1)的右端，我們得到：

$$\Delta=\varphi'(x+\theta_1\Delta x)\Delta x,$$

其中 $0<\theta_1<1$。但是按照函數 $\varphi(x)$ 的定義，

$$\varphi'(x)=f'_x(x,y+\Delta y)-f'_x(x,y),$$

所以我們得到：

$$\Delta=[f'_x(x+\theta_1\Delta x,y+\Delta y)-f'_x(x+\theta_1\Delta x,y)]\Delta x. \tag{2}$$

但是，另一方面，再對上式右端方括號內的差應用有限改變量定理，顯然就得到：

$$f_x(x+\theta_1\Delta x,y+\Delta y)-f'_x(x+\theta_1\Delta x,y)=f''_{xy}(x+\theta_1\Delta x,y+\theta_2\Delta y)\Delta y,$$

其中 $0<\theta_2<1$。因此關係式(2)就變成了

$$\Delta=f''_{xy}(x+\theta_1\Delta x,\ y+\theta_2\Delta y)\Delta x\Delta y. \tag{3}$$

現在我們回到量 Δ 原來的表達式，再用另外一個方法來處置它。令

$$f(x+\Delta x, y)-f(x, y)=\psi(y),$$

於是

$$\Delta=\psi(y+\Delta y)-\psi(y).$$

應用有限改變量定理卽得

$$\Delta=\psi'(y+\theta_3\Delta y)\Delta y,$$

其中 $0<\theta_3<1$。根據函數 $\psi(y)$ 的定義，

$$\psi'(y)=f'_y(x+\Delta x, y)-f'_y(x, y),$$

於是我們有:

$$\Delta=[f'_y(x+\Delta x, y+\theta_3\Delta y)-f'_y(x, y+\theta_3\Delta y)]\Delta y.$$

再應用有限改變量定理，得到:

$$\Delta=f''_{yx}(x+\theta_4\Delta x, y+\theta_3\Delta y)\Delta x\Delta y \qquad (0<\theta_4<1). \tag{4}$$

比較等式(3)與(4)，當 $\Delta x\Delta y\neq 0$ 時，我們有:

$$f''_{xy}(x+\theta_1\Delta x, y+\theta_2\Delta y)=f''_{yx}(x+\theta_4\Delta x, y+\theta_3\Delta y).$$

現在讓 Δx 與 Δy 趨向於零，但始終保持 $\Delta x\,\Delta y\neq 0$。因爲根據我們的假定 f''_{xy} 與 f''_{yx} 在點 (x, y) 連續，所以取極限的結果是:

$$f''_{xy}(x, y)=f''_{yx}(x, y), \tag{5}$$

而這就是我們要證明的。

現在再來討論一般的情形。我們先假定有兩個同爲 n 級的偏導數，$n\geqslant 2$；這兩個偏導數只在每兩個連接的微分運算中有一回順序相反，例如

$$f^{(5)}_{xxyxy},\ f^{(5)}_{xyxxy},$$

其中只有第二次與第三次微分運算的順序相反，其餘的運算完全一樣。顯然根據我們剛才證明的結果(在所要求的連續性條件之下)可以推知這兩個導數彼此相等。比如說，在我們的例子中，把公式(5)應用到函數 $f'_x(x, y)$，就得到

$$f'''_{xxy}=f'''_{xyx}.$$

然後再把這個等式的兩端先關於 x，再關於 y 進行微分，就得到這兩個

給定的五級導數之間的等式。

在最一般的情形，當我們有兩個任意的 n 級導數，彼此之間只在進行微分的順序上有所不同時，顯然我們可以從其中一個逐步交換每兩個相連接的微分運算的順序來得到另外的一個。因為每一次這樣的交換都保持導數不變，所以這兩個給定的導數彼此相等。

因此，以上證明的這個命題首先大大地縮減了彼此不同的 n 級導數的數目，並且使得每一個這種導數看起來更為一目了然。事實上，如果進行微分的先後順序沒有什麼關係，則我們要得到任何導數都可以(譬如說)先對 x 微分所需要微分那樣多次，然後再對 y 來進行微分。這樣一來，函數 u 的任何一個 n 級導數都可以表成下列形式：

$$\frac{\partial^n u}{\partial x^k \partial y^{n-k}},$$

其中 k 是 $0, 1, 2, \cdots, n$ 諸數之一。這樣，也立刻說明了不同的 n 級導數只有 $n+1$ 個，但原來我們有 2^n 個這種導數，換句話說，(當 n 相當大時)原來多了許多倍。

三元或更多元函數的高級偏導數，可以跟二元情形一樣定義，並且可以採用類似的記法。這時，高級偏導數變換微分順序的可能性，在相應導數連續的條件下還是成立。這個定理可以直接從前面二元的定理推出來，因為對於任何一個多元函數來說，對它進行微分的順序的任意一種改變，都可以從一系列交換兩個連接的微分運算的順序來得到，而這樣交換的結果(在相應導數連續的假定下)我們已經證明是不改變導數的值的。

關於 § 94 的練習可以參看 Б. П. 捷米多維奇的習題集，第六章，習題 82, 112, 113, 118—120, 162, 164, 166。

§ 95. 二元函數的戴勞公式

所有那一切促使我們用戴勞公式來表達一元函數的理由，對於任

意多元的函數依然都保持有效。跟一元的情形一樣，無論是爲了理論的或實際計算的目的，用多項式來近似表達一個已知函數都有很大的好處。這樣一種表達的可能性，對於我們新的情况來說，所要求的先決條件跟一元函數情形是一樣的。在那裏，戴勞公式的得來，可以看作是從對每一個可微函數都成立的簡單公式

$$f(x+h)-f(x)=hf'(x)+o(h)$$

加以推廣的結果。對二元的可微函數 $u=f(x,y)$ 我們有完全類似的公式

$$\Delta u=f(x+h,y+k)-f(x,y)=hf'_x(x,y)+kf'_y(x,y)+o(\rho),$$

其中 $\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$。因此，對我們來說，最基本的問題就在於要設法把量 $f(x+h,y+k)$ 近似地表作關於改變量 h 與 k 的多項式。這實際上是可以做到的，只要把第九章中我們用來得出一元函數的戴勞公式的那套辦法，在稍加修改得更複雜一些之後，重複一遍就成了。

但是，如果我們不要一切都從頭開始，而直接來利用一元的戴勞公式已經成立的事實，則達到我們預想的目的就還會要簡捷得多。我們下面就採用這個辦法。這個辦法還有另一個好處，那就是它對於任意多元的函數都一樣適用。以下我們只是爲了簡單起見，才限於討論二元函數的情形。我們把值 x 與 y 以及改變量 h 與 k 通通都看做常量而來考慮另一個變量 $t\,(0\leqslant t\leqslant 1)$ 的函數

$$\varphi(t)=f(x+ht,y+kt). \tag{1}$$

我們假定函數 $f(x,y)$ 有直到 n 級爲止的偏導數，並且所有這些偏導數在點 (x,y) 都可微。於是根據 § 92 公式(2)，導數 $\varphi'(t)$ 存在並且等於

$$\varphi'(t)=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{d(x+ht)}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{d(y+kt)}{dt}=h\frac{\partial f}{\partial x}+k\frac{\partial f}{\partial y},$$

其中兩個偏導數都是在點 $(x+ht,y+kt)$ 取值的。再把上述公式應用到函數 $\varphi'(t)$，又利用 § 94 的結果(5)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x},$$

我們不難得出：

$$\varphi''(t)=h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2hk\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2},$$

其中所有的偏導數仍舊都在點 $(x+ht, y+kt)$ 取值。用同樣的辦法我們還可以得到

$$\varphi'''(t)=h^3\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}+3h^2k\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}+3hk^2\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}+k^3\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}.$$

以上這些公式使我們推想到普遍的公式

$$\varphi^{(n)}(t)=\sum_{r=0}^{n}C_n^r h^{n-r}k^r\frac{\partial^n f}{\partial x^{n-r}\partial y^r}\tag{2}$$

在出現的各級偏導數都存在而且可微時也許總是成立的，這裏所有的偏導數都在點$(x+ht, y+kt)$取值。公式(2)當 $n=1, 2, 3$ 時，我們已經證明其成立，它的一般情形是否也對就可以用歸納法(從 n 到 $n+1$)來證明。這個證明在概念上是簡單而且明瞭的，但是要完成它却需要相當繁複的計算。

現在假定公式(2)對於某一個 n 已經成立，並且假定在公式中出現的一切偏導數在點$(x+ht, y+kt)$都是可微的。應用 § 92 公式(2)到函數 $\varphi^{(n)}(t)$，我們得到

$$\varphi^{(n+1)}(t)=\sum_{r=0}^{n}C_n^r h^{n-r}k^r\left\{h\frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^{n-r+1}\partial y^r}+k\frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^{n-r}\partial y^{r+1}}\right\}=$$

$$=\sum_{r=0}^{n}C_n^r h^{n+1-r}k^r\frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^{n+1-r}\partial y^r}+\sum_{r=0}^{n}C_n^r h^{n-r}k^{r+1}\frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^{n-r}\partial y^{r+1}}=$$

$$=\sum\nolimits_1+\sum\nolimits_2.$$

在第二個和中我們變換求和的指標，令 $r=s-1$。於是

$$\sum_2 = \sum_{s=1}^{n+1} C_n^{s-1} h^{n+1-s} k^s \frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^{n+1-s} \partial y^s},$$

把新的求和指標仍舊記作 r, 則

$$\sum_2 = \sum_{r=1}^{n+1} C_n^{r-1} h^{n+1-r} k^r \frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^{n+1-r} \partial y^r}. \tag{3}$$

我們還要注意下面的事實：如果對於任何 n 我們令

$$C_n^{-1} = C_n^{n+1} = 0,$$

則在 Σ_1 的表達式與 Σ_2 的表達式(3)中，從 $r=0$ 到 $r=n+1$ 求和不會改變它們的值。因而我們得到：

$$\varphi^{(n+1)}(t) = \sum_{r=0}^{n+1} (C_n^r + C_n^{r-1}) h^{n+1-r} k^r \frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^{n+1-r} \partial y^r}.$$

但是根據二項式係數的熟知的性質

$$C_n^r + C_n^{r-1} = C_{n+1}^r \quad (0 \leqslant r \leqslant n+1),$$

我們立刻得到：

$$\varphi^{(n+1)}(t) = \sum_{r=0}^{n+1} C_{n+1}^r h^{n+1-r} k^r \frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^{n+1-r} \partial y^r};$$

而這就表示，公式(2)當 n 換作 $n+1$ 時仍舊成立。因而這個公式的普遍成立就證明了。

特別說來，這也證明了當函數 $f(x, y)$ 具有可微的直到 n 級為止的偏導數時，函數 $\varphi(t)$ 就有 n 級的導數。由此可見對於 $\varphi(t)$ 我們可以有麥克勞林公式：

$$\varphi(t) = \varphi(0) + t\varphi'(0) + \frac{t^2}{2!}\varphi''(0) + \cdots$$

$$\cdots + \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\varphi^{(n-1)}(0) + \frac{t^n}{n!}\varphi^{(n)}(\theta t),$$

其中我們把餘項寫成了大家在 § 39 中已經熟知的拉格朗日的特殊形

式。特別讓 $t=1$，就有

$$\varphi(1)=\varphi(0)+\varphi'(0)+\frac{1}{2!}\varphi''(0)+\cdots$$

$$\cdots+\frac{1}{(n-1)!}\varphi^{(n-1)}(0)+\frac{1}{n!}\varphi^{(n)}(\theta),$$

其中 $0<\theta<1$。但 $\varphi(0)=f(x,y)$，$\varphi(1)=f(x+h,y+k)$，而函數 φ 的一系列導數當 $t=0$ 時仍然由公式(2)表達，不過這時(2)中的一切偏導數都應在點 (x,y) 取值了。因此，我們就得到了

$$f(x+h,\ y+k)=f(x,\ y)+\left(h\frac{\partial f}{\partial x}+k\frac{\partial f}{\partial y}\right)+$$

$$+\frac{1}{2!}\left(h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2hk\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)+\cdots$$

$$\cdots+\frac{1}{(n-1)!}\sum_{r=0}^{n-1}C_{n-1}^{r}h^{n-1-r}k^{r}\frac{\partial^{n-1}f}{\partial x^{n-1-r}\partial y^{r}}+$$

$$+\frac{1}{n!}\sum_{r=0}^{n}C_n^r h^{n-r}k^r\frac{\partial^n f(x+\theta h,\ y+\theta k)}{\partial x^{n-r}\partial y^r},\qquad(4)$$

其中 $0<\theta<1$，又一切偏導數(最後一個和(餘項)中的除外)都在點 (x,y) 取值(因而與 h,k 無關)。

以上得到的這個公式完全解決了我們所提出的問題，因爲它不但給出了量 $f(x+h,y+k)$ 表作關於 h,k 的 $n-1$ 次多項式的近似表達式。並且不難看出它的餘項還是合於我們所要求的形式 $o(\rho^{n-1})$ 的 $(\rho=\sqrt{h^2+k^2})$，因爲 $|h|\leqslant\rho$，$|k|\leqslant\rho$，從而

$$|h^{n-r}k^r|\leqslant\rho^n=o(\rho^{n-1})\quad(0\leqslant r\leqslant n).$$

公式(4)有一個缺點，那就是它不免有些累贅(雖然它本身的結構很清楚而且易於記憶，但是在外表上究竟比較複雜)。而且在我們從二元函數轉到討論三元或更多元的函數時，這種累贅的程度還會大大地增加。因此爲了要把戴勞公式寫成更簡便的形式，我們通常採用一種

方便的符號記法。我們對於任一個自然數 q 寫出表達式

$$\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^q f.$$

如果我們把 ∂ 看做一個數(而不看作是微分運算的符號),則根據二項式公式把括號中兩項的 q 次乘方展開,我們就得到:

$$\left[\sum_{r=0}^{q} C_q^r h^{q-r} k^r \frac{\partial^q}{\partial^{q-r}\partial y^r}\right] f=\sum_{r=0}^{q} C_q^r h^{q-r} k^r \frac{\partial^q f}{\partial x^{q-r}\partial y^r},$$

換句話說,除去差一個因子 $\frac{1}{q!}$ 而外,我們得到的就是戴勞公式的第 q 項。如果我們把上面的寫法再簡寫成

$$\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^q f=L_q f,$$

於是,L_q 就是一個可以在函數 f 上施行而又完全確定了的運算,它的內容就是我們剛才詳細寫出來的一切。利用這樣一種記號,我們就可以把戴勞公式寫成下列形式:

$$f(x+h,y+k)=\sum_{q=0}^{n-1}\frac{1}{q!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^q f(x,y)+$$

$$+\frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(x+\theta h,y+\theta k),$$

或者,更簡單一些,

$$f(x+h,y+k)=\sum_{q=0}^{n-1}\frac{1}{q!}L_q f(x,y)+\frac{1}{n!}L_n f(x+\theta h,y+\theta k).$$

§ 95 的練習讀者可以參看 Б. П. 捷米多維奇的習題集,第六章,習題 390, 391, 396, 398, 400, 406, 407。

§ 96. 極 值

多元函數在一個給定的(自變量取值的)區域上的極大值與極小值

的定義，跟一元函數的情形是完全一樣的。如果函數在給定的區域的某一個內點的函數值不小於(或不大於)函數在與該點充分接近的任何其他點的函數值時，我們就說這個內點是函數的一個局部極值點。跟一元的情形一樣，函數在一個給定的區域上的極值(最大值或最小值)可以在該區域的邊界上達到，也可以在某一個內點達到，在後一種情形，這個內點自然就是一個局部極值點。當然，對於多元函數來說，極值的識別比一元情形要複雜一些，因為甚至於就是一個最簡單的區域，需要跟局部極值比較的就有全部邊界點上的函數值，而全部邊界點的個數却有無窮多(在一元的情形，區間的邊界一共只有兩個點)。因此我們還必需求出在所給區域的邊界上函數的最大值或最小值，換句話說，還要解決一個輔助的極值問題。事實上，在實際問題中常常因為對這個或那個實際對象的考慮，可以預先認為已經知道函數是在，比如說，區域的內部(而不是在邊界上)取到它的最大值，而這樣一來，就在本質上簡化了問題的解答。無論如何，作為一個微分學的問題來說，在這裏只剩下怎麼樣來找局部極值點了。

如果函數 $u=f(x, y)$ 在點 (a, b) 有一個局部極值，則顯然一元函數

$$\varphi(x)=f(x, b)$$

應當在點 $x=a$ 有一個局部極值。假定函數 $f(x, y)$ 在給定的區域內到處都可微。於是，很明顯，在點 a 的附近函數 $\varphi(x)$ 有導數並且導數就等於 $f'_x(x, b)$。從 § 41 我們知道，這就必然有 $\varphi'(a)=0$, 也就是說，函數 $f(x, y)$ 的偏導數 $\frac{\partial f}{\partial x}$ 在點 $x=a, y=b$ 必需等於零。完全類似的考慮可以證明在該點我們也必然有 $\frac{\partial f}{\partial y}=0$。最後，用同樣的方法我們不難證明，我們所得到的結果對於任意多元的函數也是對的：如果一個多元函數在某一個區域上可微，則在一切(位於該區域內部的)局部極值點，這個函數的一切偏導數都等於零。

如果在某一點，給定的函數關於一切變量的偏導數都等於零，則我們稱該點為函數的一個穩定點。§ 91 公式(1)指出，在穩定點，函數沿

任何方向的導數都等於零。所以穩定點是這樣一個點，當該點沿任何方向變動時函數的變化最小。這一點，正好說明爲什麼我們要用穩定點這個名稱。

因此，在多元的情形，求極値的問題首先在於找出函數在給定的區域內的一切穩定點。如果我們談到的是 n 元函數，則令這個函數的 n 個偏導數都等於零，就得到關於穩定點的坐標的一組 n 個未知量的 n 個方程。求這個方程組的解，已經不是微分學的事情了。

下面，我們假定一切這種穩定點都已經求出來了，我們要像在一元函數的情形那樣做，一個一個地來研究這些穩定點，看那些點使給定的函數達到極大値或極小値，那些點兩者都得不到。這樣一個研究比起一元函數的情形要複雜得多，我們在這裏只考慮二元函數的情形作爲這個研究的第一步。

假定 $P(a,b)$ 是函數 $u=f(x,y)$ 的一個穩定點，又假定這個函數在點 P 有一切的二級偏導數。除 P 點外我們再考慮點 $Q(a+h,b+k)$，把 P,Q 兩點間的距離記作 ρ，即

$$\rho=\sqrt{h^2+k^2}.$$

最後假定 A,B,C 分別代表在 P 點的偏導數

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2},\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y},\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

根據戴勞公式(§ 95, (4))，當 $\rho\to 0$ 時我們有❶

$$\Delta u=f(a+h,b+k)-f(a,b)=\frac{1}{2}(Ah^2+2Bhk+Ck^2)+o(\rho^2).$$

如果把向量 $\overrightarrow{PQ}$（點 P 的“位移”）與 OX 軸的正方向的交角記作 α，則顯然有

$$h=\rho\cos\alpha,\quad k=\rho\sin\alpha,$$

從而

❶ 關於 h,k 的一次項等於零，因爲 $P(a,b)$ 是穩定點。

$$\Delta u = f(a+h, b+k) - f(a, b) =$$

$$= \frac{1}{2}\rho^2(A\cos^2\alpha + 2B\cos\alpha\sin\alpha + C\sin^2\alpha) + o(\rho^2).$$

利用改變量 Δu 的這個表達式，不難知道穩定點 $P(a, b)$ 的性質，依賴於量

$$\varphi(\alpha) = A\cos^2\alpha + 2B\cos\alpha\sin\alpha + C\sin^2\alpha$$

（看作"位移角" α 的函數）當 α 從 0 變到 2π 時的變動狀態。例如，假定 $\varphi(\alpha)>0(0\leqslant\alpha\leqslant 2\pi)$。因爲 $\varphi(\alpha)$ 是 α 的連續函數，它在區間 $(0, 2\pi)$ 上一定達到一個最小值 μ，又根據假定 μ 應當是正的。於是由於上述的 Δu 的表達式，當 $\rho\to 0$ 時我們就有：

$$\Delta u = \rho^2\left\{\frac{1}{2}\varphi(\alpha) + o(1)\right\}.$$

又因爲 $\varphi(\alpha)\geqslant\mu$ $(0\leqslant\alpha\leqslant 2\pi)$，所以當 ρ 充分小時，我們應該有 $\Delta u>0$（無論 α 取什麼值）。而這就表示，函數 $u=f(x, y)$ 在點 (a, b) 有一個**極小值**。用完全同樣的方法我們可以證明當 $\varphi(\alpha)<0$ $(0\leqslant\alpha\leqslant 2\pi)$ 時，函數 $u=f(x, y)$ 在點 (a, b) 有一個**極大值**。最後，如果 $\varphi(\alpha)$ 在區間 $(0, 2\pi)$ 上既取正值又取負值，則不妨假定 $\varphi(\alpha_1)>0$, $\varphi(\alpha_2)<0$。如果我們對於固定的 α 讓 ρ 趨向於零，則當 ρ 充分小時，對於 $\alpha=\alpha_1$ 我們顯然有 $\Delta u>0$，而對於 $\alpha=\alpha_2$ 則有 $\Delta u<0$。這就說明，函數 $u=f(x, y)$ 在穩定點 (a, b) 既沒有極大又沒有極小。因此，量 $\varphi(\alpha)$ 在 $0\leqslant\alpha\leqslant 2\pi$ 時的符號，對於研究一個已知穩定點的性質，具有決定一切的意義。

大家都知道，在研究像 $\varphi(\alpha)$ 這樣的"二次三項式"的符號時，"判別式" $\Delta = AC-B^2$ 起着決定性的作用。因而，我們應該分成三種情形來考慮。

1．$\Delta = AC - B^2 > 0$。我們有恆等式

$$A\varphi(\alpha) = (A\cos\alpha + B\sin\alpha)^2 + \Delta\sin^2\alpha. \tag{1}$$

因爲在這個情形顯然有 $A\neq 0$，所以上式右端第一項只有當

$\operatorname{ctg}\alpha=-\frac{B}{A}$時才等於零，而第二項祇有當 $\sin\alpha=0$ 時才等於零。由於這兩個條件是不能同時成立的(當 $\sin\alpha=0$ 時,角 α 沒有餘切),所以對於任何 α 都有 $A\varphi(\alpha)>0$。如果 $A>0$,則 $\varphi(\alpha)$ 也大於零,因而函數 u 在點 P 有一個局部極小。反之，在 $A<0$ 時則我們有 $\varphi(\alpha)<0$ 因而在點 P 函數 u 有一個局部極大。所以,在 $\Delta>0$ 的情形點 P 永遠是函數 u 的局部極值點，至於究竟是極大還是極小則可以根據量 A 的符號來確定。

2．$\Delta=AC-B^2<0$。我們先假定這裏 $A\neq0$。從關係式(1)可知，當 $\alpha=0$ 時((1)式右端第一項是正的,第二項等於零)我們有 $A\varphi(\alpha)>0$。反之,當

$$\operatorname{ctg}\alpha=-\frac{B}{A}$$

時,則我們有 $A\varphi(\alpha)<0$ (這時(1)式右端第一項是零,第二項是負的)。所以 $\varphi(\alpha)$ 對於不同的 α 可以有不同的符號,因而函數 u 在點 P 不可能有局部極值。

在 $A=0$ 的情形我們有同樣的結果。這時

$$\varphi(\alpha)=2B\cos\alpha\sin\alpha+C\sin^2\alpha=\sin\alpha(2B\cos\alpha+C\sin\alpha),\quad(2)$$

其中 $B\neq0$, 因爲否則我們將有 $\Delta=0$ 了。如果 α 是一個充分小的正的角,則顯然

$$|C|\sin\alpha<2|B|\cos\alpha,$$

於是括號 $(2B\cos\alpha+C\sin\alpha)$ 的符號與它的第一項的符號一致，因而當把 α 換作 $-\alpha$ 時符號不變。但是因爲 $\sin\alpha$ 的符號隨著 α 的符號的改變而改變，所以從關係式(2)可以知道,$\varphi(\alpha)$ 與 $\varphi(-\alpha)$ 有相反的符號而函數 u 在點 P 仍舊不能有局部極值。因此在 $\Delta<0$ 的情形,在點 P 沒有局部極值。

3．$\Delta=AC-B^2=0$。這時,一般說來,從戴勞公式的第二級的項的研究,還不能下最後的結論。當函數 u 在點 P 具有三級的偏導數時,開

題可以歸結到戴勞公式下一項的研究。不過在這裏，我們不能涉及這些問題了。

例．函數

$$z=x^2-xy+y^2-2x+y$$

有唯一的穩定點 $x=1,\ y=0$, 這是從方程組

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2x-y-2=0,\ \frac{\partial z}{\partial y}=-x+2y+1=0$$

解出來的。在這裏我們有

$$A=2,\ B=-1,\ C=2,$$

從而 $\Delta=AC-B^2=3$。因爲 $A>0$, 所以 z 有唯一的極值，在點(1, 0)有一個極小值。

§ 96 的練習可以參看 Б. П. 捷米多維奇的習題集，第六章，習題 425, 429, 430, 435, 487, 488。

第二十三章　微分學的簡單幾何應用

§ 97. 平面曲線的切線方程與法線方程

把導數作爲原來函數所代表的曲線在一個給定點的切線斜率的幾何解釋，提供了利用微分學來解決一系列幾何問題的可能性。假定我們現在要想對於作爲可微函數 $y=f(x)$ 的圖形的曲線，在橫坐標爲 a 的點引它的切線(圖 55)。在解析幾何中我們知道：通過坐標爲 (a,b) 的點的直線方程可以寫成

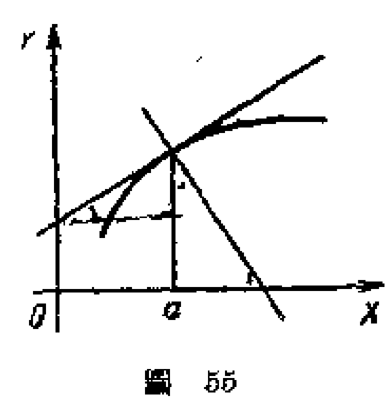


圖　55

$$y-b=k(x-a),$$

其中 k 是直線的斜率。在我們剛才所說的情形，有 $b=f(a), k=f'(a)$；所以曲線 $y=f(x)$ 在橫坐標爲 a 的點的切線方程就是

$$y-f(a)=f'(a)(x-a).$$

通過切點並且與切線垂直的直線，稱爲曲線在該切點處的**法線**。由於兩條互相垂直的直線的斜率 k 與 k' 滿足 $kk'=-1$，所以曲線 $y=f(x)$ 在橫坐標爲 a 的點的法線斜率等於 $-\frac{1}{f'(a)}$（在 $f'(a)\neq 0$ 的條件下）。因而法線的方程就是

$$y-f(a)=-\frac{1}{f'(a)}(x-a),$$

或即

$$x-a+f'(a)[y-f(a)]=0.$$

在解析幾何中大家都知道：在很多情形下，曲線的"參變"表示法常常是更方便的。所謂曲線的參變表示法，就是用兩個方程

$$x=\varphi(t),\quad y=\psi(t)$$

來表示曲線，對於"參變量" t 在某個區間上的每一個確定的值，都對應有給定的曲線上的一個確定的點 (x,y)。我們知道，在這種點，曲線的

切線斜率應該等於

$$y'=\frac{dy}{dx};$$

我們也知道(§ 33),當 x(從而 y 也一樣)是某個新變量 t 的函數時(我們現在的情形,就正是這樣)通過微分來表達的這個導數的表達式仍然是對的。由於 t 是自變量,我們有:

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}.$$

但是因爲 $\frac{dx}{dt}=\varphi'(t)$, $\frac{dy}{dt}=\psi'(t)$, 所以

$$y'=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}.$$

如果我們要寫出曲線在對應於參變量的值 t 的點的切線方程，則我們應該考慮到這個點的坐標實際上等於 $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, 又切線斜率等於 $y'=\psi'(t)/\varphi'(t)$; 因此切線方程是

$$y-\psi(t)=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}[x-\varphi(t)].$$

或者寫成更方便的對稱形式,是

$$\frac{x-\varphi(t)}{\varphi'(t)}=\frac{y-\psi(t)}{\psi'(t)}. \tag{1}$$

因爲在這種情形,法線斜率等於

$$-\frac{1}{y'}=-\frac{\varphi'(t)}{\psi'(t)},$$

所以法線方程就是

$$y-\psi(t)=-\frac{\varphi'(t)}{\psi'(t)}[x-\varphi(t)],$$

或即

$$\varphi'(t)[x-\varphi(t)]+\psi'(t)[y-\psi(t)]=0. \tag{2}$$

如果曲線是用極坐標方程給出的:

$$r=f(\theta)$$

而我們要想得到在以 θ_0, $r_0=f(\theta_0)$ 爲坐標的點的切線方程,則我們可以把這個問題化成我們剛才討論過的情形,只要注意到曲線上的點的笛卡爾坐標與極坐標之間的一般聯繫是

$$x=r\cos\theta,\qquad y=r\sin\theta,$$

我們就可以得到:

$$x=f(\theta)\cos\theta,\ y=f(\theta)\sin\theta. \tag{3}$$

方程(3)就是給定的曲線的參變方程,其中 θ 是參變量。我們有:

$$\frac{dx}{d\theta}=f'(\theta)\cos\theta-f(\theta)\sin\theta,\quad \frac{dy}{d\theta}=f'(\theta)\sin\theta+f(\theta)\cos\theta.$$

根據(1),在點 $\theta=\theta_0$ 的切線方程(在笛卡爾坐標系統下)就是

$$\frac{y-f(\theta_0)\sin\theta_0}{f'(\theta_0)\sin\theta_0+f(\theta_0)\cos\theta_0}=\frac{x-f(\theta_0)\cos\theta_0}{f'(\theta_0)\cos\theta_0-f(\theta_0)\sin\theta_0},$$

寫成極坐標形式,就是

$$\frac{r\sin\theta-f(\theta_0)\sin\theta_0}{f'(\theta_0)\sin\theta_0+f(\theta_0)\cos\theta_0}=\frac{r\cos\theta-f(\theta_0)\cos\theta_0}{f'(\theta_0)\cos\theta_0-f(\theta_0)\sin\theta_0},$$

或者令 $f(\theta_0)=r_0$, $f'(\theta_0)=r_0'$,即

$$\frac{r\sin\theta-r_0\sin\theta_0}{r_0'\sin\theta_0+r_0\cos\theta_0}=\frac{r\cos\theta-r_0\cos\theta_0}{r_0'\cos\theta_0-r_0\sin\theta_0}.$$

§ 97 的練習可以參看 Б. П. 捷米多維奇的習題集,第二章,習題 119—121, 124, 126, 141, 142。

§ 98. 空間曲線的切線與法面

空間曲線的切線的幾何定義,與我們採用的平面曲線的切線定義毫無區別。要想在給定的曲線上的某一點 M 處引切線,我們在曲線上接近 M 的地方另取一點 N,引通過這兩點的直線(割線)。如果當點 N 沿這條曲線無限逼近點 M 時,上述割線趨向於一個極限位置,則這個極

限直線就稱爲給定的曲線在點M的切線。如果給定的空間曲線的方程是參變形式：

$$x=\varphi(t),\ y=\psi(t),\ z=\chi(t).$$

則我們的問題是要找這個曲線在對應於參變量 t 的值 t_0 的點（也就是以 $x_0=\varphi(t_0), y_0=\psi(t_0), z_0=\chi(t_0)$ 爲坐標的點）處的切線方程。爲此，我們給參變量 t 一個改變量 Δt，然後從給定的點(x_0,y_0,z_0)轉而考慮點

$$x_0+\Delta x=\varphi(t_0+\Delta t),\ y_0+\Delta y=\psi(t_0+\Delta t),\ z_0+\Delta z=\chi(t_0+\Delta t).$$

通過這兩點（給定的點與轉而考慮的點）聯一條直線（割線），按照解析幾何的法則，這條割線的方程是

$$\frac{x-x_0}{\Delta x}=\frac{y-y_0}{\Delta y}=\frac{z-z_0}{\Delta z},$$

或者等價地，是

$$\frac{x-x_0}{\frac{\Delta x}{\Delta t}}=\frac{y-y_0}{\frac{\Delta y}{\Delta t}}=\frac{z-z_0}{\frac{\Delta z}{\Delta t}}. \tag{1}$$

如果我們現在讓 Δt 趨於零，並且假定當 $t=t_0$ 時，函數 $\varphi(t)$, $\psi(t)$, 與 $\chi(t)$ 都有異於零的導數（這些導數依次記作 x_0', y_0' 與 z_0'），則方程組(1)當我們取極限時就成爲：

$$\frac{x-x_0}{x_0'}=\frac{y-y_0}{y_0'}=\frac{z-z_0}{z_0'}, \tag{2}$$

或卽

$$\frac{x-\varphi(t_0)}{\varphi'(t_0)}=\frac{y-\psi(t_0)}{\psi'(t_0)}=\frac{z-\chi(t_0)}{\chi'(t_0)}. \tag{3}$$

方程組(2)或(3)，完全類似於 § 97 中的方程(1)，顯然解決了空間曲線的切線的分析表達問題。

我們用 α, β, 與 γ 分別代表給定的曲線在點(x_0, y_0, z_0)的切線與三個坐標軸的正方向之間的夾角，於是按照解析幾何的法則，我們就有：

$$\cos\alpha=\frac{\varphi'(t_0)}{\sqrt{\varphi'^2(t_0)+\psi'^2(t_0)+\chi'^2(t_0)}},\quad \cos\beta=\frac{\psi'(t_0)}{\sqrt{\varphi'^2(t_0)+\psi'^2(t_0)+\chi'^2(t_0)}},$$

$$\cos\gamma=\frac{\chi'(t_0)}{\sqrt{\varphi'^2(t_0)+\psi'^2(t_0)+\chi'^2(t_0)}}.$$

特別情形，如果給定的曲線的方程是

$$y=y(x),\ z=z(x),\tag{4}$$

則在點(x_0, y_0, z_0)的切線方程就是

$$x-x_0=\frac{y-y_0}{y'(x_0)}=\frac{z-z_0}{z'(x_0)},$$

因而我們有：

$$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+y'^2(x_0)+z'^2(x_0)}},\ \cos\beta=\frac{y'(x_0)}{\sqrt{1+y'^2(x_0)+z'^2(x_0)}},$$

$$\cos\gamma=\frac{z'(x_0)}{\sqrt{1+y'^2(x_0)+z'^2(x_0)}}.$$

根號前面符號的選擇依賴於切線選取這個或那個方向。

通過空間曲線的一個點並且與在這一點的切線垂直的平面稱爲給定的曲線在該點的**法面**。在空間曲線的理論中，法面起着重要的作用，正如在平面曲線的理論中，法線佔有重要的地位一樣。按照通常的解析幾何的法則，知道了曲線在一點的切線方程(2)或(3)，我們就可以立刻寫出曲線在該點的法面方程：

$$x_0'(x-x_0)+y_0'(y-y_0)+z_0'(z-z_0)=0,$$

或即

$$\varphi'(t_0)[x-\varphi(t_0)]+\psi'(t_0)[y-\psi(t_0)]+\chi'(t_0)[z-\chi(t_0)]=0.$$

很明顯，這個方程跟§97中平面曲線的法線方程(2)完全類似。

在特別情形，當給定的曲線由方程(4)表達時，在點(x_0, y_0, z_0)的法面方程就是

$$x-x_0+y'(x_0)(y-y_0)+z'(x_0)(z-z_0)=0.$$

§98的練習可以參看Б. П. 捷米多維奇的習題集，第二章，習題341, 342, 344, 346。

§ 99. 曲面的切面與法線

現在我們來考慮空間中的曲面，假定它的方程是

$$F(x, y, z)=0. \tag{1}$$

先在曲面上取一個點M，假定它的坐標是 x_0, y_0, z_0，當然，我們有 $F(x_0, y_0, z_0)=0$。在曲面上，任意引一條通過點M的曲線；假定這條曲線的參變方程是

$$x=\varphi(t),\ y=\psi(t),\ z=\chi(t). \tag{2}$$

因爲整個曲線(2)都在曲面(1)上，所以我們必然有恆等式(換句話說，對於參變量 t 的某個區間上的一切值 t)

$$F[\varphi(t), \psi(t), \chi(t)]\equiv 0. \tag{3}$$

另一方面，又因爲曲線(2)通過點 $M(x_0, y_0, z_0)$，所以對於參變量 t 的某個值 t_0，我們又應該有：

$$x_0=\varphi(t_0), y_0=\psi(t_0), z_0=\chi(t_0).$$

爲了得到進一步的結果，我們還有必要假定函數 $F(x, y, z)$ 在點 $M(x_0,y_0,z_0)$ 是可微的。在第二十二章中，我們已經規定過函數 $u=$ $=f(x, y, z)$可微的定義是：當 $\rho\to 0$ 時，有：

$$\Delta u=du+o(\rho);$$

其中

$$\Delta u=f(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z)-f(x, y, z),$$

$$du=\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}\Delta y+\frac{\partial f}{\partial z}\Delta z,$$

$$\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2}.$$

對於可微函數，複合函數的微分法也成立(§ 92)；換句話說，如果函數 $u=f(x, y, z)$是可微函數，而 x, y, z 又都是某個新變量 t 的可微函數，則

$$\frac{du}{dt}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt}. \tag{4}$$

回到我們現在討論的問題，正如我們已經說過的，我們假定函數 $F(x,y,z)$ 在（對應於參變量的值 $t=t_0$ 的）點 (x_0,y_0,z_0) 是可微的。如果利用 (2) 式把 x,y,z 表作 t 的函數，則 $F(x,y,z)$ 就變成參變量 t 的一個複合函數，而且由於 (3) 式，這個函數恆等於零。因此也就有 $\frac{dF}{dt}=0$，從而根據公式(4)，就得到

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{dz}{dt}\equiv 0. \tag{5}$$

有了這個等式，我們現在就可以寫出曲線(2)在對應於 $t=t_0$ 的點 $M(x_0,y_0,z_0)$ 的切線方程了。根據 §98 中公式 (2)，這種方程可以寫成下列形式：

$$\frac{x-x_0}{x_0'}=\frac{y-y_0}{y_0'}=\frac{z-z_0}{z_0'}.$$

因此，對於切線上的任何一點 (x,y,z)，這三個比值相同，我們把這個共同的比值記作 $\frac{1}{\lambda}$（當然，對於切線上不同的點，λ 的值也不同）。於是

$$x_0'=\lambda(x-x_0),\ y_0'=\lambda(y-y_0),\ z_0'=\lambda(z-z_0). \tag{6}$$

另一方面，如果用 A,B,C 依次來記 $\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}$ 在點 $M(x_0,y_0,z_0)$ 的值，則恆等式(5)就給出當 $t=t_0$ 時，

$$Ax_0'+By_0'+Cz_0'=0.$$

把這個等式中的 x_0',y_0' 與 z_0' 用(6)式代入，再消去 λ，我們就得到：

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0. \tag{7}$$

現在我們來回想一下，x,y,z 在這裏是曲線(2)在點 M 的切線上的任意一點的坐標，而 A,B 與 C 是函數 F 的偏導數在點 M 的值。如果在方程(7)中，我們把 x,y,z 看作一般的坐標，則方程(7)就是某一個通過點 M 的平面，而且這個平面只依賴於曲面(1)的形式，而完全不依賴於在這個曲面上所選取的曲線(2)。由於曲線(2)的切線上的任何一點都滿足方程(7)，所以整個切線都在平面(7)上。但是，曲線(2)是曲面

(1)上通過點M的任意一條曲線。這樣的曲線顯然可以有無窮多條；然而，不管怎麼樣，我們已經看到，一切這種曲線的切線都同在平面(7)上；這個平面(7)，是曲面(1)上通過點M的一切曲線的切線的"負荷者"(就幾何位置而言)，我們把它稱爲曲面(1)在點M的**切面**。切面的方程(7)可以寫成更能表達其含義的形式，只要我們把函數F在點M的偏導數A, B, C，依次寫成

$$\frac{\partial F}{\partial x_0}, \quad \frac{\partial F}{\partial y_0}, \quad \frac{\partial F}{\partial z_0},$$

其中附標0表示這三個偏導數是在點$x=x_0, y=y_0, z=z_0$取值的，於是，切面的方程就成爲：

$$\frac{\partial F}{\partial x_0}(x-x_0)+\frac{\partial F}{\partial y_0}(y-y_0)+\frac{\partial F}{\partial z_0}(z-z_0)=0.$$

通過點M並且與切面垂直的直線稱爲曲面在點M的**法線**。按照解析幾何的法則，法線的方程(在三個偏導數中沒有一個爲零的條件下)可以寫成

$$\frac{x-x_0}{\frac{\partial F}{\partial x_0}}=\frac{y-y_0}{\frac{\partial F}{\partial y_0}}=\frac{z-z_0}{\frac{\partial F}{\partial z_0}}.$$

在特別情形，當曲面的方程是

$$z=f(x, y) \tag{8}$$

時，我們有$F(x, y, z)=z-f(x, y)$，因而切面的方程式是

$$z-z_0=\frac{\partial f}{\partial x_0}(x-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y_0}(y-y_0),$$

又法線方程是：

$$z-z_0=-\frac{x-x_0}{\frac{\partial f}{\partial x_0}}=-\frac{y-y_0}{\frac{\partial f}{\partial y_0}}.$$

如果用α, β與γ分別來記曲面(8)在點(x_0, y_0, z_0)的法線與坐標軸的正方向之間的三個夾角，則根據解析幾何，就有：

$$\cos\alpha=\frac{-\frac{\partial f}{\partial x_0}}{\pm\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x_0}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y_0}\right)^2}},$$

$$\cos\beta=\frac{-\frac{\partial f}{\partial y_0}}{\pm\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x_0}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y_0}\right)^2}},$$

$$\cos\gamma=\frac{1}{\pm\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x_0}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y_0}\right)^2}}.$$

這裏根式前面符號的選擇依賴於我們所討論的法線選取這個或那個方向；當然，不管怎麼樣，這些符號在三個公式中必須取成是一樣的。

§ 99 的練習可以參看 Б. П. 捷米多維奇的習題集，第六章，習題 351, 352, 360—362。

§ 100. 曲線的凸與凹的方向

現在我們再回到平面曲線的理論，轉而討論另外一個問題——關於曲線的凸與凹的問題。我們假定函數 $y=f(x)$ 在點 $x=a$ 有二級導數。在點 a 曲線 $y=f(x)$ 的切線方程是

$$y=f(a)+f'(a)(x-a).$$

因而，在接近點 a 的一個點 $a+h$，切線的縱坐標應該是

$$y_{\text{кас}}=f(a)+hf'(a);$$

另一方面，曲線在點 $a+h$ 的縱坐標則是

$$y_{\text{кр}}=f(a+h);$$

為了要知道這兩條曲線在點 a 的鄰近究竟誰在上面，我們來考慮差

$$y_{\text{кр}}-y_{\text{кас}}=f(a+h)-f(a)-hf'(a);$$

因為按照假設 $f''(a)$ 存在，所以這個等式的右端根據戴勞公式可以寫成

$$\frac{h^2}{2}f''(a)+o(h^2),$$

因而，我們就得到：

$$y_{\text{кр}}-y_{\text{кас}}=\frac{h^2}{2}f''(a)+o(h^2).$$

假定 $f''(a)\neq 0$；於是右端的第二項當 $h\to 0$ 時與第一項比起來是一個較高級的無窮小量；因而右端的符號（從而左端的符號）當 $|h|$ 很小時與第一項的符號相同，也就是說，與 $f''(a)$ 的符號相同。如果 $f''(a)>0$，則在一切充分接近 a 的點，都有 $y_{\text{кр}}>y_{\text{кас}}$，換句話說，曲線在切線的上面（圖 56, a）；如果 $f''(a)<0$ 則它們的位置正好反過來（圖 56, $б$）。

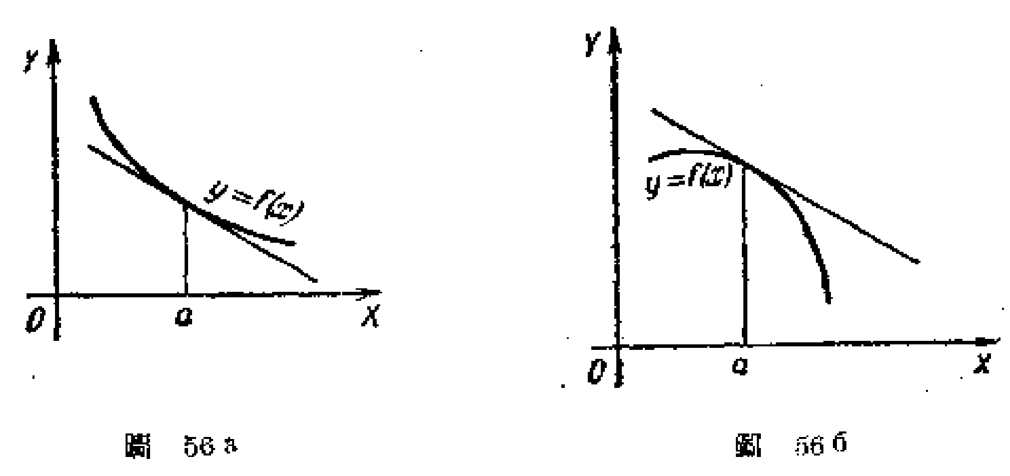


圖　56 a　　　　圖　56 б

在第一種情形，我們說曲線 $y=f(x)$ 在點 a 向下（向 y 軸的負方向）凸或者向上（向 y 軸的正方向）凹；

在第二種情形，則正好相反，曲線在點 a 向上凸或者向下凹。這樣一種說法，從圖 56, a 與 $б$ 看來，是極自然而且一目了然的。因此，我們已經看到，二級導數的符號完全決定了曲線的凹與凸的方向，就正如一級導數的符號完全解決了函數圖形的上昇與下降一樣。

現在反過來假定已經知道曲線 $y=f(x)$ 在點 a 的附近向下凸（換句話說，曲線位於它的切線之上）。如果 $f''(a)$ 存在，則根據前面的討論，它不能是負的，因爲否則曲線與切線位置就要顚倒過來。所以 $f''(a)\geqslant 0$。在這裏 $f''(a)=0$ 的情形是完全可能的，曲線 $y=x^4$ 在 $x=0$ 就是一個例子。當然，對於在點 a 曲線向上凸的情形，同樣的考慮說明，必然有 $f''(a)\leqslant 0$，而且 $f''(a)=0$ 的可能性也同樣不能除外。最後，

還有一種可能，就是在點 a 的附近，曲線在點 a 的一邊在切線之上，而在另一邊又在切線之下；我們不止一次地討論過的函數 $y=x^3$ 在 $x=0$ 的附近就正是這樣（§ 40, 圖 21）。在這種點，曲線穿過切線，並且改變凹凸的方向。這種類型的點通常稱爲曲線的扭轉點。顯然，在一個扭轉點 a，如果二級導數 $f''(a)$ 存在，則它必然等於零。

因此，如果我們僅僅知道 $f''(a)=0$，則曲線在點 a 的附近的凸凹的方向還無法知道；這時它可能向上凸，也可能向下凸，也可能只是在點 a 有一個扭轉點；甚至於還可能是另外的更複雜的形狀。要想進一步研究這種情形，那就必需再考查戴勞級數中的後面一項，就像我們研究函數的極值時那樣(§ 41)。不過，我們這裏不能再詳談這個問題了。

§ 100 的練習可以參看 Б. П. 捷米多維奇的習題集，第二章，習題 **348, 349, 352—354, 362**。

§ 101. 平面曲線的曲率

我們一眼就可以看出來：不同的曲線在不同的部分有着不同的彎曲程度。圖 57 中的曲線的左邊那一部分幾乎像一條直線，差不多看不出它有什麼彎曲；但是，相反地，它的右邊那一部分卻彎曲得很厲害。圓周的各個部分的彎曲程度似乎都是一樣的。但是如果我們畫幾個半徑不同的圓周，使它們在某一點有公共的切線（圖 58），則我們又會很

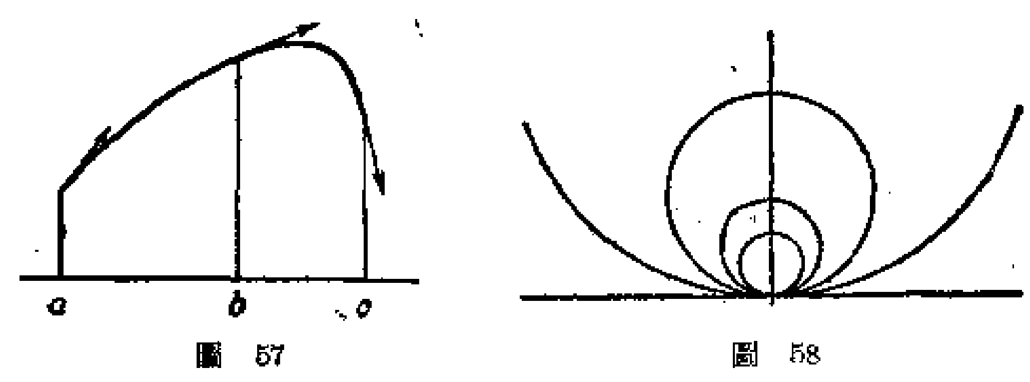


圖 57　　　　圖 58

清楚地看出：半徑越小的圓周彎曲得越厲害。在我們乘汽車或火車作旅行時，對於彎曲得很厲害的道路（急轉彎處），即使我們不從窗子上去

看，也能够明顯地感覺到它。彎曲的這種實際意義迫使我們來對它進行科學的計算；我們不僅要"定性地"學會比較不同的曲線的彎曲程度（這條曲線彎得厲害一些，那條又彎得不太厲害，等等），而且要"定量地"給出曲線的彎曲程度的量的估計，換句話說，要學會如何來度量曲線彎曲程度的大小。在築路的科學中（任何類型的路），這樣的精細的態度是完全必要的——正如像在物理學與熱工學中，我們不能够簡單地滿足於知道這個物體比較熱，那個物體比較冷，而還必須要學會定量地來度量不同的物體冷熱的程度（也就是它的溫度）一樣。

我們一眼就可以看出來：曲線的彎曲程度與它的方向變化的快慢是密切地聯繫着的。例如，圖 57 中的曲線在(a, b)段上就幾乎沒有變化它的方向——在這一段上不同的點（特別情形如以 a 與 b 為橫坐標的兩點）的切線幾乎是互相平行的；因而這條曲線在(a, b)段上就表現出彎曲得很少；但是反過來，在(b, c)段上，這條曲線就彎曲得很厲害，因為在這一段上，它的方向變化很大——特別在這一段的兩個端點的切線方向就有着顯著的不同。因而，這就很明顯了，要想測量曲線在這一段或那一段上的彎曲程度，我們應該從曲線在這一段上的切線旋轉所成的角出發，也就是說，應該把這一段的起點與終點上的切線之間的夾角作為由之出發來進行計算的量。然而僅僅知道這個角，我們還不能就由此確定曲線在已知段上的彎曲程度。因為，比如說有人告訴你，鐵路在某一段上轉過了30°，這顯然並不能給你關於這條鐵路的彎曲程度的任何概念。毫無疑問，你會問這一段鐵路有多長。比如說，如果鐵路是在兩公里長的一段上轉過了 30°，那麼很明顯，這個彎曲程度是微不足道的；但是，如果是在一百公尺長的一段上就旋轉了 30°，那當然就是够厲害的彎曲了。因此，為了測量曲線在給定的一段上的彎曲程度，就不僅要知道曲線在這一段上的方向變化的角 φ，而且還需要知道這一段的長度 s。很明顯，把比值 $\frac{\varphi}{s}$，也就是單位長的曲線段上的方向變化，作為測量曲線在給定的一段上的彎曲程度的尺度是很自然的。

這個比值稱爲曲線在給定的一段上的**平均曲率**。這樣一個名稱是完全合理的，因爲很清楚，曲線在給定的一段上的不同部分可以有不同的彎曲程度，而平均曲率這個概念一點也不代表這些不同的彎曲程度，它只不過指出在單位長的曲線段上曲線方向的平均變化有多大而已。

假如我們要想從這個平均曲率出發來得到在曲線上某一點 A 的鄰近的彎曲程度的局部性質，則我們就必需像§26 中，從運動着的物體在一段時間內的平均速度出發，得到該物體在某一時刻的瞬時(局部的)速度那樣來考慮。在曲線上除 A 外再任意另取一點 B；假定 AB 弧長等於 s，又曲線在點 A 與 B 的切線的交角是 φ，則曲線在弧 AB 上的平均曲率等於 $\frac{\varphi}{s}$。如果點 B 的位置與 A 很接近(也就是 s 很小)，則我們有理由認爲曲線由 A 到 B 的彎曲程度還來不及有顯著的變化，因而弧 AB 的平均曲率 $\frac{\varphi}{s}$ 能够相當精確地刻劃出曲線在點 A 的附近的彎曲程度；當 s 越小，也就是說點 B 越逼近點 A，則這個刻劃也就越精確。因此，如果當 $B\to A$ (或即，當 $s\to 0$)時，平均曲率 $\frac{\varphi}{s}$ 趨向於某一個極限值 K，則很自然地，我們就把這個極限值算作**曲線在點** A (或者在點 A 的附近)**的**(局部的)**曲率**。

因此，所**謂一條給定的曲線在曲線上一點 A 的曲率，就是當曲線上另一點 B，沿曲線無限逼近 A 時，曲線在點 A 與 B 的切線間的夾角與弧 AB 的長度之比的極限**。

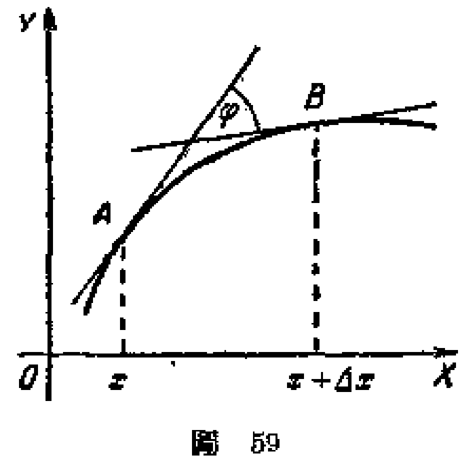


圖 59

以上我們給出了(局部的)曲率概念的幾何定義。現在我們來指出，微分學的方法使我們還有可能來實際計算曲線在它的任何一點的曲率。假定函數 $y=f(x)$(其圖形就是以上所說的給定的曲線)在點 x 有二級導數。除點 $A(x,y)$外，我們再考慮曲線上另一點 $B(x+\Delta x, y+\Delta y)$(圖 59)。如果我們把曲線在 A, B 兩點的切線與 OX 軸的正方向間的夾角分別記

作 α 與 β, 則很明顯,

$$\operatorname{tg}\alpha=f'(x),\ \operatorname{tg}\beta=f'(x+\Delta x).$$

這兩條切線之間的夾角等於 φ, 如圖 60 所示: $\varphi=|\alpha-\beta|=|\operatorname{arc\,tg} f'(x+\Delta x)-$ $-\operatorname{arc\,tg} f'(x)|$。另一方面,如果我們把曲線相當於 (a,x) 區間的這一段的弧長記作 $s(x)$, 其中 a 是某個常數,則弧 AB 的長度 s 就等於

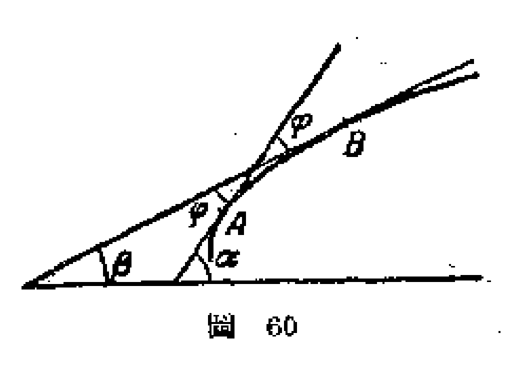


圖 60

$$s=s(x+\Delta x)-s(x).$$

因此,我們得到給定的曲線在 AB 弧上的平均曲率的表達式是:

$$\frac{\varphi}{s}=\frac{|\operatorname{arc\,tg} f'(x+\Delta x)-\operatorname{arc\,tg} f'(x)|}{s(x+\Delta x)-s(x)}.$$

或者,分子分母都用 Δx 除,

$$\frac{\varphi}{s}=\frac{\dfrac{|\operatorname{arc\,tg} f'(x+\Delta x)-\operatorname{arc\,tg} f'(x)|}{\Delta x}}{\dfrac{s(x+\Delta x)-s(x)}{\Delta x}}.$$

如果現在我們讓 Δx 趨向於零,則由於假定了 $y''=f''(x)$存在, 分子趨向於

$$\left|\frac{d\operatorname{arc\,tg} y'}{dx}\right|=\frac{|y''|}{1+y'^2},$$

同時根據 §52,分母應該有正的極限

$$\frac{ds}{dx}=\sqrt{1+y'^2}.$$

從而我們得到給定的曲線在點 $A(x,y)$的曲率的表達式就是:

$$K=\lim_{s\to 0}\frac{\varphi}{s}=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}},\tag{1}$$

而這樣就解決了我們的問題。

如果給定的曲線的方程是參變形式:

$$x=\varphi(t),\ y=\psi(t),$$

則

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)},$$

$$y''=\frac{d}{dx}\left[\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right]=\frac{\frac{d}{dt}\left[\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right]}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\varphi'(t)\psi''(t)-\varphi''(t)\psi'(t)}{[\varphi'(t)]^3},$$

經過一些簡單運算之後，就由公式(1)得到：

$$K=\frac{|\varphi'(t)\psi''(t)-\varphi''(t)\psi'(t)|}{[\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)]^{3/2}}.\tag{2}$$

直線的分析表達式是一個線性方程 $y=mx+n$，它在任一點都有 $y''=0$，因此根據公式(1)就有 $K=0$；換句話說，直線的曲率等於零。對於半徑爲 r 的圓周，用參變方程比較方便：

$$x=r\cos t,\ y=r\sin t.$$

經過一些簡單的計算之後，就由公式(2)得出 $K=\frac{1}{r}$；換句話說，圓周在任何一點的曲率都一樣，都等於半徑的倒數。

§ 102. 密觸圓

假定曲線 $y=f(x)$ 在點 $A(x,y)$ 的曲率 K 不等零($y''\neq 0$)。在點 A 引曲線的法線(圖 61)，又在法線上曲線凹的一面取線段 AC，使 AC 之長爲 $\frac{1}{K}$。如果我們現在以點 C 爲圓心，以 $r=\frac{1}{K}$ 爲半徑畫一個圓周，則

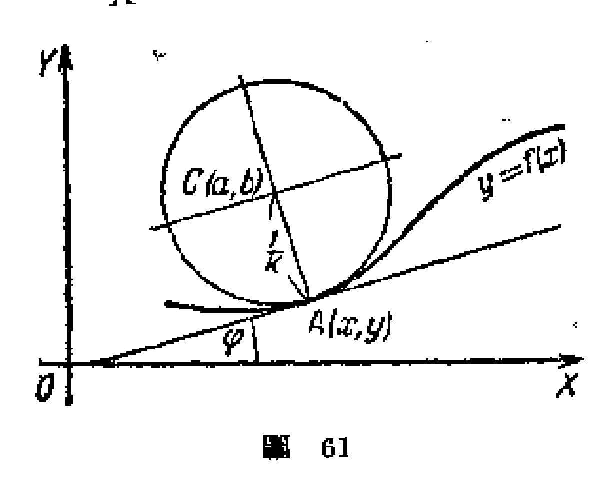


圖 61

這個圓周通過點 A 並且與曲線在這一點有公共的切線(因爲半徑 CA 在曲線的法線上)。再者，曲線 $y=f(x)$ 與這個圓周顯然在點 A 有同樣的凹凸方向。最後，這兩條曲線在點 A 的曲率也是一樣的，因爲圓周的曲率等於 $\frac{1}{r}$，也就是 $K\left(=\frac{1}{r}\right)$。因此，

我們可以說：在通過點A的一切圓周中，以這個圓周在點A的附近與給定的曲線的形狀最爲接近，它們有共同的方向(切線)，有同樣的曲率，並且連凹凸的方向都是一致的。

上述這個圓周稱爲給定的曲線在點A的**曲率圓**。它的半徑

$$r=\frac{1}{K}=\frac{(1+y'^2)^{3/2}}{|y''|},$$

稱爲**曲率半徑**，它的圓心稱爲曲線在點A的**曲率中心**。正如在那些只談到曲線方向的問題中，可以拿切線來代替曲線一樣，在那些更複雜的，不僅談到曲線的方向，而且也談到曲線凹凸的方向以及它的曲率的問題中，我們就可以拿曲率圓來代替給定的曲線。在大量的關於曲線的幾何研究中，曲率圓的價值就在於此。當然，這也就是爲什麼曲率圓又很自然地稱爲曲線在點A的**切圓**(或者通常所謂**密觸圓**)的緣故。

現在我們來求出曲率中心的坐標(a, b)的分析表達式。在圖 61 中的情形，$|y''|=y''>0$, $y'>0$, $x>a$, $y<b$。差$x-a$與$b-y$乃是線段r依次在OX與OY方向上的投影。因此如果我們用φ表示在點A的切線與OX軸的正方向之間的夾角(卽 $\operatorname{tg}\varphi=y'$)，則

$$x-a=r\sin\varphi=\frac{(1+y'^2)^{3/2}}{y''}\cdot\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}=\frac{y'(1+y'^2)}{y''},$$

$$b-y=r\cos\varphi=\frac{(1+y'^2)^{3/2}}{y''}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}=\frac{1+y'^2}{y''},$$

由此得到

$$a=x-\frac{y'(1+y'^2)}{y''},\quad b=y+\frac{1+y'^2}{y''}.$$

不難證明，無論曲線$y=f(x)$在點A的附近的形狀如何，上述公式總是對的。

我們還可以從另一個觀點出發來引進密觸圓，其結果可以更加滿意地說明它與切線的相似。我們以前是把切線規定爲通過點 $A(x, y)$

與曲線上另一點 $B(x+\Delta x, y+\Delta y)$ 的割線，當 Δx 趨於零(從而 Δy 也趨於零)時的極限位置的。但是如果希望通過這兩點的不是直線，而是圓周，則我們就遇到一個困難，即這種圓周可以畫出無窮多個。大家都知道，要確定一個圓周，給定兩個點是不够的，必需有該圓周將要通過的(不在一條直線上的)三個點。因此，我們在曲線上除點 A 外，再取兩個點 B_1 與 B_2，其橫坐標為 x_1 與 x_2。通過 A，B_1 與 B_2 的圓周方程可以寫成

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=\rho^2,$$

其中半徑 ρ 與圓心的坐標 α, β 可以由這個圓周必需通過 A，B_1 與 B_2 三點的要求來決定。如果我們令

$$(x-\alpha)^2+[f(x)-\beta]^2-\rho^2=F(x),$$

則顯然這些要求就是

$$F(x)=0, F(x_1)=0, F(x_2)=0. \tag{1}$$

由這三個方程我們就可以確定出未知數 α, β 與 ρ。然而，我們以下採用另一個方法。為了確定起見不妨假定 $x<x_1<x_2$。於是對函數 $F(x)$，我們可以根據(1)式分別在區間 (x, x_1) 與 (x_1, x_2) 上應用羅爾定理。這就給出：

$$F'(\xi_1)=F'(\xi_2)=0,$$

其中 $x<\xi_1<x_1<\xi_2<x_2$。根據這個結果，就可以再在區間 (ξ_1, ξ_2) 上對函數 $F'(x)$ 應用羅爾定理，我們得出：

$$F''(\xi)=0,$$

其中 ξ 是 ξ_1 與 ξ_2 之間的一個點。

現在讓點 B_1 與 B_2 沿曲線無限制地逼近點 A，換句話說，令 $x_1 \to x$ 同時 $x_2 \to x$。很明顯，這時點 ξ_1，ξ_2 與 ξ 也都趨向於 x。我們通過點 A，B_1 與 B_2 的圓，在這個過程中，一直在改變它的半徑與位置。對於點 B_1 與 B_2 的每一種位置，我們都可以由方程(1)求出這個圓周的 α, β 與 ρ；當然，我們可以實際把這些計算完成，然後再來考察當 $x_1 \to x$ 與 $x_2 \to x$

時，α, β 與 ρ 究竟趨向於什麼樣的極限。不過，我們以下不這樣做，而是採用另外一種更簡單的辦法。因為對於任何兩點 x_1 與 x_2，我們都有

$$F(x)=0,\ F'(\xi_1)=0,\ F''(\xi)=0.$$

又因為 $\xi_1\to x,\ \xi\to x$，所以對於極限圓我們必然有[1]

$$F(x)=F'(x)=F''(x)=0,$$

換句話說，如果我們把極限圓的圓心與半徑分別記作 (a, b) 與 r，又令 $f(x)=y$，則

$$F(x)=(x-a)^2+(y-b)^2-r^2=0$$

$$F'(x)=2(x-a)+2(y-b)y'=0$$

$$F''(x)=2+2y'^2+2(y-b)y''=0.$$

由最後一個方程立刻得出：

$$b-y=\frac{1+y'^2}{y''},$$

代入中間一個方程就得到：

$$a-x=-\frac{(1+y'^2)y'}{y''};$$

最後，在第一個方程中代入 $b-y$ 與 $a-x$，就得到：

$$r=\frac{(1+y'^2)^{3/2}}{y''}.$$

所有這些得到的公式說明：我們所求的極限圓周實際上與曲線在點 A 的曲率圓重合。

因此，一條曲線在它的一點 A 的曲率圓(或密觸圓)就是通過點 A 以及曲線上與它無限接近的另外兩點的圓周的極限位置。

§§101—102 的練習讀者可以作 Б. П. 捷米多維奇的習題集中，第二章，習題 566, 567, 571, 572, 575, 576, 577。

---

[1] 這裏假定了 $F''(x)$ 在點 x 是連續的，對於這個計算，只要 $f''(x)$ 在這一點連續就夠了。

第二十四章　隱函數

§ 103. 簡單問題

在 § 92 中我們就已經遇到過隱函數，現在最好回想一下，我們在那裏究竟解決了一個什麼樣的問題。我們當時是從這樣一個假定出發的，我們假定函數 $y=f(x)$ 在某一個區間 (a, b) 上滿足方程

$$F(x, y)=0, \tag{1}$$

亦即，假定

$$F[x, f(x)]=0 \qquad (a \leqslant x \leqslant b).$$

然後在函數 $f(x)$ 在區間 (a, b) 上可微的假定下，我們提出了用函數 F 關於 x 與 y 的偏導數來表達 $f(x)$ 的導數的問題，並且求出了這個表達式：

$$y'=f'(x)=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}.$$

然而在實際場合，問題常常不是這樣提出的。我們往往只知道有一個函數 $F(x, y)$；至於在某一個區間上滿足方程(1)的函數 $y=f(x)$，則不僅它的可微性或者連續性不知道，甚至於它的存在也都沒有事先加以假定。換句話說，我們主要要說明的問題乃是：在什麼樣的條件下這個函數存在，並且具有這個或那個我們所需要的性質。在用來確定新的非初等函數的各種各樣的方法中，這種利用方程來"不明顯(隱藏)地"確定出函數的方法是重要的方法之一。用這種方法來確定函數所特有的全部規律性，就構成了隱函數的理論。在本章中，我們就要討論這個理論的初等的一部分。

我們以上描述的這個問題的提法，還可以大大地加以推廣。代替二

元函數 $F(x,y)$，我們可以假定已經給定了一個任意多個變量的函數 $F(x,y,z,\cdots u,v)$，然後我們就可以提出由方程

$$F(x,y,z\cdots,u,v)=0$$

來確定某一個變量，比如說 v，是其餘變量 $x,y,z,\cdots,u$ 的函數的問題。換句話說，我們可以提出這樣一個問題，是否有變量 $x,y,z,\cdots,u$ 的一個函數

$$v=f((x,y,z,\cdots,u)$$

存在，它在這些變量取值的某一個區域上滿足方程

$$F[x,y,z,\cdots u,f(x,y,z,\cdots,u)]=0,$$

又，如果有這樣一個函數存在的話，這個函數是否具有某種我們所希望的性質？

在隱函數的一般理論中，關於這個問題，還有更廣泛的提法，那就是：不僅給出一個而是給出若干個方程

$$\left.\begin{array}{l}F_1(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0,\\F_2(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0,\\\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\F_m(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0,\end{array}\right\}\tag{2}$$

它們的左端依賴於 n 個變量，又 $n>m$。我們要想關於變量 x_i 中的 m 個，比如說，$x_1,x_2,\cdots x_m$，來“解”這個方程組。換句話說，要在什麼樣的條件下，才有變量 $x_{m+1},x_{m+2},\cdots,x_n$ 的 m 個函數

$$\begin{array}{l}x_1=f_1(x_{m+1},x_{m+2},\cdots,x_n),\\x_2=f_2(x_{m+1},x_{m+2},\cdots,x_n),\\\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\x_m=f_m(x_{m+1},x_{m+2},\cdots,x_n)\end{array}$$

存在，使得在變量 $x_{m+1},x_{m+2},\cdots,x_n$ 取值的某一個區域上它們恆等地滿足方程組(2)，或者說，對於這個區域上的任何 $x_{m+1},x_{m+2},\cdots,x_n$ 都有

$$F_k[f_1(x_{m+1},x_{m+2},\cdots,x_n),\cdots,f_m(x_{m+1},x_{m+2},\cdots,x_n),x_{m+1},\cdots,x_n]=0$$

$(k=1,2,\cdots,m)$。又，當這些函數存在時，我們來研究它們的重要性質

連續性，可微性等等)。

今後，我們把只有一個方程（不管變量有多少）的問題稱爲簡單問題，有若干個方程的問題稱爲一般問題。在本節中我們只討論簡單問題。我們就會看到，進行研究的方法跟變量的個數沒有什麼關係。因此；爲了避免不必要的累贅，我們只詳細討論關於二元情形的簡單問題。對於任意多元的情形，我們的全部論證都一樣有效。

因此，以下我們假定給定了一個方程

$$F(x, y)=0, \tag{3}$$

要來找出一個在 x 的某個區間上恆等地滿足這個方程的函數 $y=f(x)$。顯然，這個函數的存在與否以及它的性質如何都完全依賴於所給的函數 $F(x, y)$ 的性質。我們對函數 F 所作的假定越多，關於函數 $f(x)$ 所能得到的結論也就更加確定。因此，我們提出的問題可以有各種不同的提法；在這些不同的各種提法中，我們現在只考慮其中的一種，——使得隱函數理論能夠有大量的應用的那一種。

定理 1. 假定函數 $F(x, y)$ 在一個矩形 R ($x_0-a\leqslant x\leqslant x_0+a$, $y_0-b\leqslant y\leqslant y_0+b$) 上連續並且對於每一個自變量都有連續的偏導數。又假定

$$F(x_0, y_0)=0, \qquad F'_y(x_0, y_0)\neq 0.$$

則一定有唯一的一個函數 $y=f(x)$ 存在，它在某個區間 Δ ($x_0-\alpha\leqslant x\leqslant x_0+\alpha$) 上連續，恆等地滿足方程 (3)，並且當 $x=x_0$ 時就等於 y_0。又這個函數在區間 Δ 上還有連續導數。

證明. 1° 函數 $f(x)$ 的存在。

爲了確定起見，不妨假定 $F'_y(x_0, y_0)>0$。根據 §23 的引理（這個引理對於任意多元的連續函數都成立），一定有某個矩形 R' ($x_0-\alpha\leqslant x\leqslant x_0+\alpha$, $y_0-\beta\leqslant y\leqslant y_0+\beta$) 存在，對於 R' 的每一個點（圖 62），我們都有 $F'_y(x, y)>0$。以下我們應該特別注意，α 與 β 這兩個數是可以選得來任意小的；比如說，我們現在就可以假定 R' 整個都在 R 之內。

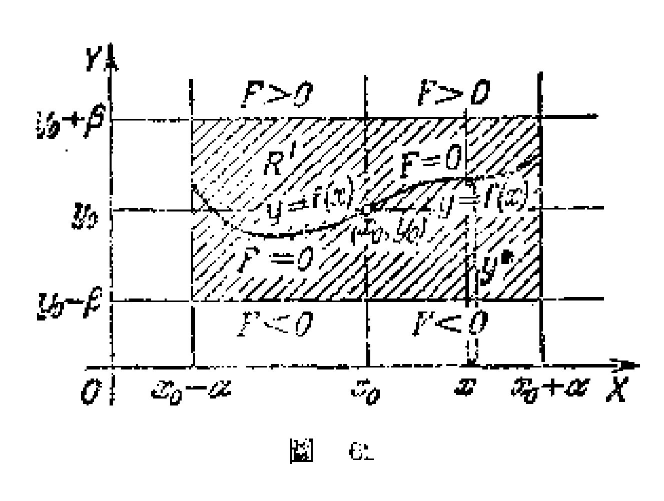


圖 62

特別是，我們就有：

$$F'_y(x_0, y)>0$$

$$(y_0-\beta\leqslant y\leqslant y_0+\beta);$$

而這也就是說，在區間 $(y_0-\beta, y_0+\beta)$ 上 $F(x_0, y)$ 是 y 的增函數。但因爲 $F(x_0, y_0)=0$，所以

$$\left.\begin{array}{l}F(x_0, y_0-\beta)<0,\\ F(x_0, y_0+\beta)>0.\end{array}\right\}\qquad(4)$$

於是根據 § 23 的引理，當我們用充分接近 x_0 的任何 x 來代替 x_0 時，不等式 (4) 仍然成立。又因爲前面已經說過，α 可以選得任意小，所以我們有權利假定不等式

$$F(x, y_0-\beta)<0, \qquad F(x, y_0+\beta)>0 \qquad (5)$$

對於區間 $\Delta(x_0-\alpha, x_0+\alpha)$ 上的任何一點 x 都成立。我們在這個區間上選取並暫時固定任意一個點 x，再令

$$F(x, y)=\varphi(y) \qquad (y_0-\beta\leqslant y\leqslant y_0+\beta);$$

於是我們有：

$$\varphi'(y)=F'_y(x, y)>0 \qquad (y_0-\beta\leqslant y\leqslant y_0+\beta),$$

因而函數 $\varphi(y)$ 在區間 $(y_0-\beta, y_0+\beta)$ 上遞增。又根據 (5) 式 $\varphi(y_0-\beta)<0$ 與 $\varphi(y_0+\beta)>0$，所以在 $y_0-\beta$ 與 $y_0+\beta$ 之間一定可以找到唯一的一點 y^*，使得 $\varphi(y^*)=0$，或即

$$F(x, y^*)=0.$$

對於區間 Δ 上的任意一個 x，y^* 都是唯一地確定的，所以 y^* 是這個區間上 x 的一個函數，我們把它記作 $f(x)$。於是我們已經證明了：**對於區間 Δ 上任何一個 x，都存在着唯一的一個在 $y_0-\beta$ 與 $y_0+\beta$ 之間的值 y，滿足方程** (3)。我們把這個值記作 $f(x)$。特別是我們有 $f(x_0)=y_0$，因爲當 $x=x_0$ 時，我們提出的兩個要求數值 $y=y_0$ 都滿足。

2° **函數** $f(x)$ **的連續性**。

現在我們來證明：我們在區間 Δ 上確定的函數 $f(x)$ 在這個區間上還是連續的。假定 x_1 是區間 Δ 的任意一個內點，又 $\varepsilon>0$ 是任意小的一個數。令 $f(x_1)=y_1$，於是 $y_0-\beta<y_1<y_0+\beta$。因為點(x_1, y_1)屬於矩形 R'，所以可以找到這樣一個矩形 R'' $(x_1-\lambda\leqslant x\leqslant x_1+\lambda,\ y_1-\mu\leqslant y\leqslant y_1+\mu)$以$(x_1, y_1)$為中心並且整個包含在 R' 之內；這裏很明顯，我們可以假定$\mu<\varepsilon$。對於矩形 R'' 的一切點，我們都有 $F'_y(x, y)>0$；特別當 $|y-y_1|\leqslant\mu$ 時，有 $F'_y(x_1, y)>0$。換句話說，$F(x_1, y)$ 在區間$(y_1-\mu, y_1+\mu)$ 上是 y 的一個遞增函數。但因為 $F(x_1, y_1)=0$，所以

$$F(x_1, y_1-\mu)<0, \qquad F(x_1, y_1+\mu)>0.$$

再引用 § 23 的引理，我們知道一定有這樣一個區間 $(x_1-\delta, x_1+\delta)$ 存在，對於這個區間上的每一個 x，不等式

$$F(x, y_1-\mu)<0, \qquad F(x, y_1+\mu)>0$$

都成立，這裏我們顯然還可以假定 $\delta<\lambda$。因此，對於區間$(x_1-\delta, x_1+\delta)$上的任何 x，都可以找到這樣一個數 y^* $(y_1-\mu<y^*<y_1+\mu)$，使得 $F(x, y^*)=0$。因為 μ 小於 ε，所以 y^* 屬於區間 $(y_1-\varepsilon, y_1+\varepsilon)$。另一方面，因為 $R''\subset R'$，所以區間$(y_1-\mu, y_1+\mu)$，從而數 y^*，在區間$(y_0-\beta, y_0+\beta)$之內。在 1° 中，我們已經證明了在這個區間上只有一個數 $y=f(x)$ 滿足方程 $F(x, y)=0$。因此，我們有 $y^*=f(x)$，從而

$$y_1-\varepsilon<f(x)<y_1+\varepsilon,$$

這裏 x 是區間$(x_1-\delta, x_1+\delta)$上的任何一點。因為 ε 可以任意小，而 x_1 又是區間 Δ 上的任意一點，這就說明，函數 $f(x)$ 在整個區間 Δ 上是連續的。

3° **函數 $f(x)$ 的唯一性**。

假定函數 $\varphi(x)$ 在區間 Δ 上連續，並且

$$\varphi(x_0)=y_0, \qquad F[x, \varphi(x)]=0 \qquad (x_0-\alpha\leqslant x\leqslant x_0+\alpha).$$

如果在區間 Δ 上，$y_0-\beta\leqslant\varphi(x)\leqslant y_0+\beta$，則根據 1°，$\varphi(x)$ 與 $f(x)$ 恆等。因此剩下來只要證明：$\varphi(x)$ 在區間 Δ 上的值不可能在區間$(y_0-$

$-\beta, y_0+\beta)$ 之外。假定不然，設 $\varphi(\bar{x})$ 就是這樣一個值，則為了確定起見，不妨假定 $\varphi(\bar{x})>y_0+\beta$。因為 $\varphi(x_0)=y_0<y_0+\beta$，所以根據函數 $\varphi(x)$ 的連續性，可以在 x_0 與 $\bar{x}$ 之間就找到這樣的一個點 x^*，使得 $\varphi(x^*)=y_0+\beta$。於是 $F[x^*,\varphi(x^*)]=F[x^*, y_0+\beta]=0$，這就跟(5)中第二個不等式矛盾，因為點 x^* 顯然是屬於區間 Δ 的。

4° $f'(x)$ 的存在與連續性。

因為根據假設，$F(x,y)$ 在矩形 R 上有連續的偏導數，當然在矩形 R' 上就更是如此，因而根據 §90 中的定理 2，它在這個矩形的任何一點 (x,y) 都是可微的，換句話說，在從點 (x,y) 轉移到點 $(x+\Delta x, y+\Delta y)$ 的過程中，我們有

$$\Delta F=F(x+\Delta x, y+\Delta y)-F(x,y)=\frac{\partial F}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial F}{\partial y}\Delta y+o(\rho),$$

其中 $\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$。在這裏，改變量 Δx 與 Δy 都是任意的。假定點 x 與 $x+\Delta x$ 同屬於區間 $(x_0-\alpha, x_0+\alpha)$，令

$$y=f(x),\qquad y+\Delta y=f(x+\Delta x),$$

於是

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x),$$

這裏 Δx 仍舊是任意的。於是，很明顯，

$$F(x,y)=F(x+\Delta x, y+\Delta y)=0,$$

因而，也就有

$$\Delta F=\frac{\partial F}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial F}{\partial y}\Delta y+o(\rho)=0,$$

可見

$$\frac{\partial F}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial F}{\partial y}\Delta y=o(\rho)=o\left(\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}\right),$$

或即

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{\Delta y}{\Delta x}=o\left(\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}\right)=o\left(1+\left|\frac{\Delta y}{\Delta x}\right|\right),$$

因為 $\sqrt{1+\alpha^2}\leqslant 1+|\alpha|$（只要把這個不等式的兩端平方就可以看出來）。但是由此我們就有：

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lambda\left(1+\left|\frac{\Delta y}{\Delta x}\right|\right)=\lambda\left(1\pm\frac{\Delta y}{\Delta x}\right),$$

其中當 $\rho \to 0$ 時，$\lambda \to 0$；所以

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x} - \lambda}{\frac{\partial F}{\partial y} \mp \lambda}.$$

在 2° 中，我們已經證明了函數 $y=f(x)$ 在區間 $(x_0-\alpha, x_0+\alpha)$ 上是連續的；所以當 $\Delta x \to 0$ 時，我們有 $\Delta y \to 0$，當然也就有 $\rho \to 0$，從而更有 $\lambda \to 0$。但是當 $\Delta x \to 0$ 時，$\frac{\partial F}{\partial x}$ 與 $\frac{\partial F}{\partial y}$ 都固定不變，而且後者不等於零；因此上面所寫的等式給出

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}.$$

顯然，這就證明了定理 1 的全部論斷。這裏得到的 $f'(x)$ 的表達式跟我們在 § 92 中得到的完全一樣。

應當指出，定理 1 跟大多數關於隱函數存在的定理一樣，具有一種局部的性質：正如定理的前提中只不過說到函數 F 在點 (x_0, y_0) 的某個鄰域(矩形 R)內的性態一樣，定理的結論也只論斷了函數 f 在點 x_0 的某個鄰域內的性質。一般說來，這兩個鄰域都可以是任意小的。

定理 1 的最自然的推廣，就是用來確定隱函數的是具有任意 n 個自變量的方程

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n, y) = 0 \tag{6}$$

的情形。如果在點 $(x_{10}, x_{20}, \cdots, x_{n0}, y_0)$，有 $F=0$ 與 $\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$，則在點 N $(x_{10}, x_{20}, \cdots, x_{n0})$ 的某個鄰域內有唯一的一個連續函數 $y= =f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$存在，滿足方程(6)並且在點$N$的值就等於 y_0；此外，這個函數對每一個自變量還都有連續的偏導數，並且這些偏導數的表達式也不難求出來。全部這些論斷的證明跟定理 1 的證明完全一樣。

§ 103 的練習可以考看 Б. П. 捷米多維奇的習題集，第六章，習題 232, 235, 237, 275。

§ 104. 一般問題

現在我們來討論一般問題，不過我們只考慮兩個方程的情形。由兩個方程的情形推到三個方程，然後再由三個方程推到四個方程等等，並不會產生新的原則上的困難，只不過寫起來更繁複累贅就是了。

假定給定了一個方程組

$$\left.\begin{aligned} F_1(x, y, z)=0, \\ F_2(x, y, z)=0. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

（爲了寫起來簡便起見，我們只討論一個自變量的情形），其中 F_1 與 F_2 在變量 x, y, z 取値的某個區域 P 上（我們不妨把它取作一個長方體）連續，並且對於每一個變量都有連續的偏導數。假定 $M(x_0, y_0, z_0)$ 是區域 P 的一個內點，又假定它的坐標滿足方程組 (1)：

$$F_1(x_0, y_0, z_0)=0,$$

$$F_2(x_0, y_0, z_0)=0.$$

我們要想建立的是：在什麼樣的條件下有唯一的一對連續函數

$$y=f_1(x), \qquad z=f_2(x)$$

存在，在點 x_0 的某個鄰域內恆等地滿足方程式 (1) 並且

$$f_1(x_0)=y_0, \qquad f_2(x_0)=z_0.$$

至於這些函數的可微性，我們也同樣要加以研究。

我們先假定偏導數 $\frac{\partial F_1}{\partial z}$ 與 $\frac{\partial F_2}{\partial z}$ 中至少有一個在點 M 不等於零。爲了確定起見，假定在點 M

$$\frac{\partial F_1}{\partial z}\neq 0.$$

根據 § 103 中定理 1（推廣到兩個自變量的情形），在 (xy) 平面上的點 $N(x_0, y_0)$ 的某個鄰域 Q 內，有唯一的一個連續函數

$$z=f(x, y)$$

存在，滿足方程組 (1) 中的第一個方程，並且在點 N 的値就是 z_0；又這個函數在點 N 的鄰域 Q 內，對於 x 與 y 都有連續的偏導數。因此，在點

N 的鄰域 Q 內，我們有關於 x 與 y 的恆等式

$$F_1[x, y, f(x, y)] = 0. \tag{2}$$

現在我們令

$$F_2[x, y, f(x, y)] = \Phi(x, y). \tag{3}$$

如果我們能找出一個連續函數

$$y = f_1(x)$$

在 x_0 的一個鄰域內恆等地滿足方程 $\Phi(x, y) = 0$，並且在點 x_0 的值就等於 y_0，則只要令

$$z = f[x, f_1(x)] = f_2(x), \tag{4}$$

我們立刻可以看出來，函數 f_1 與 f_2 就滿足我們提出的全部要求。事實上 (2) 式關於 y 是一個恆等式，因而用 x 的任何一個連續函數來代替 y，特別當 $y = f_1(x)$ 時 (只要 $f_1(x_0) = y_0$ 這一點正好成立)，結果仍然是一個恆等式。因此，在點 x_0 的某個鄰域內，有恆等式：

$$F_1\{x, f_1(x), f[x, f_1(x)]\} = F_1\{x, f_1(x), f_2(x)\} = 0.$$

另一方面，函數 $y = f_1(x)$ 是方程

$$\Phi(x, y) = 0$$

的解，所以 (3) 式在點 x_0 的某個鄰域內恆等地給出：

$$\Phi[x, f_1(x)] = F_2\{x, f_1(x), f[x, f_1(x)]\} = \\ = F_2\{x, f_1(x), f_2(x)\} = 0.$$

所以，函數 $y = f_1(x)$，$z = f_2(x)$ 的確在點 x_0 的某個鄰域內滿足方程組 (1)。另一方面，按照函數 $f_1(x)$ 的定義，我們有

$$f_1(x_0) = y_0,$$

由此再根據函數 f 的定義，就得到

$$f_2(x_0) = f[x_0, f_1(x_0)] = f(x_0, y_0) = z_0.$$

因此，根據以上的考慮，我們的問題就化成了要由方程

$$\Phi(x, y) = 0$$

中解 y 的問題。但是很明顯，要想這樣一個解存在，根據 § 103 的定理

1，只要在點 $N(x_0, y_0)$ 我們能够有：

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} \neq 0$$

就行了。現在我們來看一看，這個要求會引導出一些什麼東西來。根據函數 Φ 的定義 (3)，我們有：

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_2}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial y}; \tag{5}$$

但是恆等式 (2) 對 y 進行微分後給出：

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} + \frac{\partial F_1}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial y} = 0,$$

因此 $\left(由於 \frac{\partial F_1}{\partial z} \neq 0\right)$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F_1}{\partial y}}{\frac{\partial F_1}{\partial z}}.$$

把它代入等式 (5) 的右端，就得到

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{1}{\frac{\partial F_1}{\partial z}} \left[\frac{\partial F_1}{\partial z} \cdot \frac{\partial F_2}{\partial y} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \frac{\partial F_2}{\partial z} \right] =$$

$$= \frac{1}{\frac{\partial F_1}{\partial z}} \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial z} & \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2}{\partial z} & \frac{\partial F_2}{\partial y} \end{vmatrix}.$$

因此，要求在點 N 有 $\frac{\partial \Phi}{\partial y} \neq 0$ 跟要求在點 $M(x_0, y_0, z_0)$ 有

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial z} & \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2}{\partial z} & \frac{\partial F_2}{\partial y} \end{vmatrix} \neq 0$$

完全等價。

這個等式左端的行列式，我們稱之爲函數 F_1, F_2 關於變量 z, y 的

奧斯特洛格拉得斯基行列式，簡單地記作

$$J=\frac{D(F_1, F_2)}{D(z, y)}.$$ [1]

因此，我們已經歸結到這樣一個要求，就是要行列式 J 在點 $M(x_0, y_0, z_0)$ 不等於零。現在我們進一步指出，我們在一開始所作的假定：偏導數 $\frac{\partial F_1}{\partial z}$ 與 $\frac{\partial F_2}{\partial z}$ 中，至少有一個在點 M 不等於零，事實上是我們的新假定 $J\neq 0$ 的直接推論，因爲如果這兩個偏導數都等於零，則奧斯特洛格拉得斯基行列式中有一列全是零，而行列式本身也一定等於零。

因此，假定在點 M，$J\neq 0$。則如我們所已經看到的，在點 (x_0, y_0) 就有 $\frac{\partial \Phi}{\partial y}\neq 0$，因而我們的問題的解的存在就有了保證。又因爲函數 $f_1(x)$ 與 $f_2(x)$ 是我們接連應用 § 103 中定理 1 得到的，每一次都保證了我們的解及其導數的連續性，所以函數 f_1 與 f_2 及其導數 f_1' 與 f_2' 在點 x_0 的某個鄰域內都是連續的。

因此，剩下來我們只消證明所得到的解還是唯一的就行了。假定我們有兩個函數 $f_1^*(x)$ 與 $f_2^*(x)$ 在點 x_0 的某個鄰域內連續，並且滿足

$$F_1(x, f_1^*, f_2^*)=0,\quad F_2(x, f_1^*, f_2^*)=0, \tag{6}$$

以及

$$f_1^*(x_0)=y_0,\qquad f_2^*(x_0)=z_0; \tag{7}$$

我們要來證明：在點 x_0 的某個鄰域內必然有恆等式 $f_1^*=f_1$，$f_2^*=f_2$。

在前面我們已經指出過，在點 (x_0, y_0) 的某個鄰域內，(2) 式是關於 x, y 的一個恆等式，從而，如果在點 x_0 的某個鄰域內，用任何一個在點 x_0 的值等於 y_0 的 x 的連續函數來代替 y，它仍然成立。根據(7)，我們可以就把函數 $f_1^*(x)$ 作爲這樣一個函數，於是在點 x_0 的某個鄰域內

$$F_1[x, f_1^*, f(x, f_1^*)]=0. \tag{8}$$

但是在另一方面，根據 (6)，我們有

$$F_1(x, f_1^*, f_2^*)=0, \tag{9}$$

[1] 這個常用的記號與德國數學家雅可比的名字聯在一起，一般人通常都把奧斯特洛格拉得斯基行列式("雅可賓")的理論與應用的研究算在雅可比的身上。其實，無可懷疑地，奧斯特洛格拉得斯基比他早若干年就已經得了這些重要的結果。

又因爲 $z=f(x,y)$ 是方程

$$F_1(x,y,z)=0$$

的唯一的在點 (x_0,y_0) 的值等於 z_0 的連續解，所以由 (8) 與 (9) 就得到在點 x_0 的某個鄰域內

$$f(x,f_1^*)=f_2^*. \tag{10}$$

然而由 (3), (10) 與 (6) 可以推出，在這同一個點 x_0 的某個鄰域內

$$\Phi(x,f_1^*)=F_2[x,f_1^*,f(x,f_1^*)]=F_2[x,f_1^*,f_2^*]=0. \tag{11}$$

因爲按照定義，$y=f_1(x)$ 是方程

$$\Phi(x,y)=0$$

的唯一的在點 x_0 的值等於 y_0 的連續解，所以從 (11) 式就知道在點 x_0 的某個鄰域內

$$f_1^*(x)=f_1(x).$$

從而再根據 (4) 與 (10) 就知道也有：

$$f_2^*(x)=f_2(x),$$

這就全部證完了我們要證的東西。

我們以上研究所得的結果，可以敘述成下列定理。

定理 1. 假定在點 (x_0,y_0,z_0) 的某個鄰域內，函數 $F_1(x,y,z)$ 與 $F_2(x,y,z)$ 連續，並且對每個變量都有連續的偏導數，又假定在這一點有：

$$F_1=0,\ F_2=0,\ J=\frac{D(F_1,F_2)}{D(y,z)}\neq 0.$$

則在點 x_0 的某個鄰域內，有唯一的一組連續函數

$$y=f_1(x),\qquad z=f_2(x)$$

存在，滿足方程組 (1) 並且有 $f_1(x_0)=y_0$, $f_2(x_0)=z_0$。又這些函數在點 x_0 的某個鄰域內都有連續的導數。

我們在前面就已經說過，應用歸納法，這個定理不難推廣到任意 m 個左端是 $m+n$ 個變量 $y_1,y_2,\cdots,y_m,x_1,x_2,\cdots x_n$ 的函數 $F_1,F_2,\cdots,F_m$

的方程組的情形。在這個一般情形，在某一點的鄰域內，變量 $y_1, y_2, \cdots, y_m$ 可以唯一地表成變量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的函數的充分條件，是要在這一點

$$J=\frac{D(F_1, F_2, \cdots, F_m)}{D(y_1, y_2, \cdots, y_m)}\neq 0,$$

其中

$$J=\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} & \cdots\cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1} & \frac{\partial F_2}{\partial y_2} & \cdots\cdots & \frac{\partial F_2}{\partial y_m} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1} & \frac{\partial F_m}{\partial y_2} & \cdots\cdots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{vmatrix}$$

是函數組 $F_1, F_2, \cdots, F_m$ 關於變量 $y_1, y_2, \cdots, y_m$ 的奧斯特洛格拉得斯基行列式（在這裏我們沒有提到通常的，對於各種情形都一樣的連續性與可微性的條件）。

我們必需着重指出，所有以上我們所得到的結論都顯然具有局部性：無論在那一種情形，由給定的方程組在給定的點的某個鄰域內的性質，我們僅僅證明了在該點的某個鄰域內，方程組的解存在，而且在我們的定理中一點也沒有斷言這個鄰域的範圍會有多大。我們剩下來還需要討論的問題，是在一般情形下，函數 f_i 的導數可以怎樣用函數 F_i 的偏導數來表達。關於這個問題我們只討論定理 1 的情形。因為在點 x_0 的某個鄰域內我們有恆等式：

$$F_1[x, f_1(x), f_2(x)]=0,$$

$$F_2[x, f_1(x), f_2(x)]=0.$$

把這兩個恆等式對 x 進行微分，就得到（注意，導數 $f_1'(x)$ 與 $f_2'(x)$ 的存在與連續我們早已經證明了）

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial F_1}{\partial x}+\frac{\partial F_1}{\partial y}\frac{df_1}{dx}+\frac{\partial F_1}{\partial z}\frac{df_2}{dx}=0, \\ \frac{\partial F_2}{\partial x}+\frac{\partial F_2}{\partial y}\frac{df_1}{dx}+\frac{\partial F_2}{\partial z}\frac{df_2}{dx}=0. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

在這個方程組中，我們把$\frac{df_1}{dx}$與$\frac{df_2}{dx}$看成未知量，就可以把它們的由函數 F_1 與 F_2 的偏導數來表達的唯一的表達式求出來，因爲方程組（12）的行列式就是奧斯特洛格拉得斯基行列式 J，這個行列式在我們感到興趣的區域上是不等於零的。我們求出來的結果應該是：

$$\frac{df_1}{dx}=\frac{1}{J}\left\{\frac{\partial F_2}{\partial x}\frac{\partial F_1}{\partial z}-\frac{\partial F_1}{\partial x}\frac{\partial F_2}{\partial z}\right\},$$

$$\frac{df_2}{dx}=\frac{1}{J}\left\{\frac{\partial F_1}{\partial x}\frac{\partial F_2}{\partial y}-\frac{\partial F_2}{\partial x}\frac{\partial F_1}{\partial y}\right\}.$$

§ 105. 奧斯特洛格拉得斯基行列式

1．**一般性質**　在前節中我們已經看到，一組 m 個函數 $F_1, F_2, \cdots, F_m$ 關於它們所依賴的變量 $y_1, y_2, \cdots, y_m$ 的行列式 $J=\frac{D(F_1, F_2, \cdots, F_m)}{D(y_1, y_2, \cdots, y_m)}$，在方程組的函數解的存在問題中（或卽隱函數的存在問題中）起着重要的作用。其實，在許多其他的分析問題與應用中，我們也時常遇到這種行列式；因而我們應當把這種行列式看作是分析的論證與計算的一個重要工具。如果我們有 m 個變量 $y_1, y_2, \cdots, y_m$ 的 m 個函數 $F_1, F_2, \cdots, F_m$，又如果我們想要按照我們所提出的問題的意思，把一元函數的導數概念加以推廣，並且要使得這個推廣所得的東西仍然可以表作一個數（對於不管什麼樣的 m），則最方便的辦法幾乎總是取行列式 J 來作這個數。在 § 104 中討論隱函數存在問題時就正是這種情形；這只要比較一下 § 103 與 § 104 中的定理，就很清楚。

使得我們在某種意義下把行列式 J 看成是"函數組 $F_1, F_2, \cdots, F_m$ 關於變量組 $y_1, y_2, \cdots, y_m$ 的導數"的這個一般現象的原因，是在於這種行列式的重要性質中，有許多與通常導數的性質完全類似。我們現在就要來考慮若干這類簡單的性質。爲了簡單起見，我們限制在 $m=2$ 的情形（雖然我們將要談到的一切性質，對於任意的 m 都對）。

假定函數 $x=x(u, v)$，$y=y(u, v)$ 在 u 與 v 取值的某個區域上是

連續的，並且有關於 u 與 v 的連續偏導數；又假定在這個區域上

$$J=\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\neq 0.$$

於是對於函數組

$$F_1(x,y,u,v)=x-x(u,v),$$

$$F_2(x,y,u,v)=y-y(u,v)$$

來說，在任一點 (x_0,y_0,u_0,v_0)（其中 (u_0,v_0) 屬於給定的區域，又 $x_0=$ $=x(u_0,v_0,)y_0=y(u_0,v_0)$ 的鄰域內 § 104 定理 1 的全部假定都滿足。因而，根據這個定理就得到在點 (x_0,y_0) 的某個鄰域內，有唯一的一對反函數

$$u=u(x,y),\qquad v=v(x,y).$$

存在，並且這些函數以及它們關於 x 與 y 的偏導數都是連續的。

現在，假定我們有函數 $x=x(u,v)$, $y=y(u,v)$ 如上，再假定 u 與 v 又是新變量 s 與 t 的函數

$$u=u(s,t),\qquad v=v(s,t),$$

這裏，兩個函數都是連續的與可微的。於是，x 與 y 就都是 s, t 的"複合"函數：

$$x=x[u(s,t),v(s,t)],\quad y=y[u(s,t),v(s,t)].$$

根據複合函數的微分法則（§ 92），我們有

$$\frac{\partial x}{\partial s}=\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial s}+\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial s},\quad \frac{\partial y}{\partial s}=\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial s}+\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial s},$$

對於 $\frac{\partial x}{\partial t}$ 與 $\frac{\partial y}{\partial t}$ 我們有類似的公式。於是我們得到：

$$\frac{D(x,y)}{D(s,t)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial s}+\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial s}+\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial s}\\ \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t}\end{vmatrix}. \tag{1}$$

但是在另一方面，

$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}, \tag{2}$$

$$\frac{D(u,v)}{D(s,t)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial s} & \frac{\partial u}{\partial t}\\ \frac{\partial v}{\partial s} & \frac{\partial v}{\partial t}\end{vmatrix}. \tag{3}$$

因爲，按照衆所周知的行列式的乘法法則，行列式(1)正好等於行列式(2)與(3)的乘積，因而我們得到：

$$\frac{D(x,y)}{D(s,t)}=\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\cdot\frac{D(u,v)}{D(s,t)}. \tag{4}$$

這個（對於任意m行n列的行列式都成立的）關係式給出了複合函數組的奧斯特洛格拉得斯基行列式的組合法則，這個法則跟一元的複合函數的微分法則：

$$x=x(u),\qquad u=u(s);\qquad \frac{dx}{ds}=\frac{dx}{du}\cdot\frac{du}{ds}$$

完全類似。

特別是，如果令$s=x$, $t=y$（換句話說由新變量u, v又回到舊變量x, y），則我們從(4)式得到：

$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\cdot\frac{D(u,v)}{D(x,y)}=\frac{D(x,y)}{D(x,y)}=\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}=1;$$

這就說明：給定的函數組的奧斯特洛格拉得斯基行列式的值與反函數組的奧斯特洛格拉得斯基行列式的值互爲倒數；這個結果又跟一元函數情形的反函數微分法則：

$$y=y(x);\qquad x=x(y);\qquad \frac{dx}{dy}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

完全類似。

2、作爲面積的局部伸長係數的奧斯特洛格拉得斯基行列式　現在我們來考慮奧斯特洛格拉得斯基行列式的一個非常重要的（今後所必

需的）幾何應用。我們還是限於討論 $m=2$ 的情形。

假定函數　　$u=u(x,y),\qquad v=v(x,y)$　　(5)

在 XY 平面的某個區域上連續並且有連續的偏導數，又假定在這個區域上

$$\frac{D(u,v)}{D(x,y)}\neq 0.$$

我們從幾何的觀點來考慮變換(5)。假定 u 與 v 是某個新平面的點 (u,v) 的笛卡爾坐標，這個新平面我們稱之為 UV 平面。於是(5)式建立起 XY 平面與 UV 平面間的一個對應關係；它使得對應於 XY 平面上一個給定的區域的每一個點 $P(x,y)$，都有 UV 平面上的一個確定的點 $Q(u,v)$，其中 Q 點的坐標 u,v 由(5)式給出（圖63）。如果我們讓 XY 平面上的點 P 在上述區域上移動，則它的對應點 Q 也就在 UV 平面上依照着完全確定的方式移動。因此，在 XY 平面上有一條曲線，在 UV 平面上就有一條對應的曲線，一般說，在 XY 平面上有一個圖形，在 UV 平面上就有一個對應的圖形。特別是函數(5)的定義區域就變換成 UV 平面上的某一個區域。

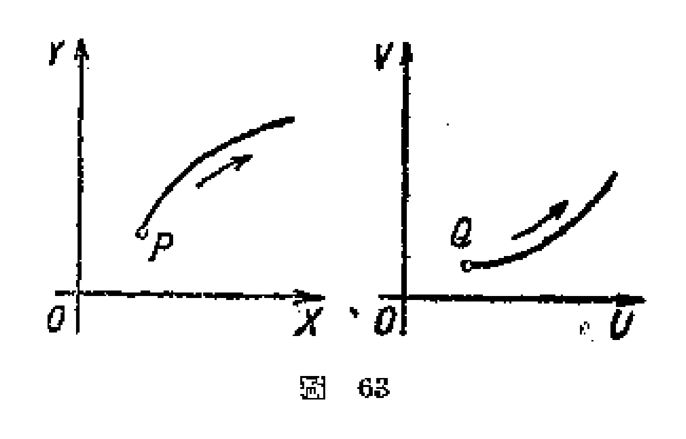
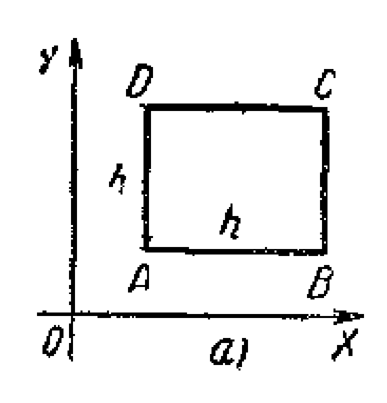


圖　63

現在我們假定 $A(a,b)$ 是 XY 平面上的一個確定的點，它位於一



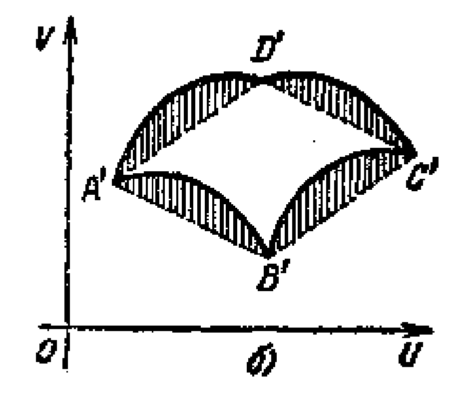


圖　64

個函數 (5) 的定義區域的內部,又假定 h 是一個很小的正數。點 $A(a, b)$, $B(a+h, b)$, $C(a+h, b+h)$, $D(a, b+h)$ (圖 64 a) 顯然是一個邊長爲 h 的正方形的頂點。變換 (5) 把這些頂點變成 UV 平面上的點 A', B', C', D' (圖 64 b), 當然,這些點的坐標分別是:

$$\left.\begin{array}{l} A'[u(a,b),\quad v(a,b)], \\ B'[u(a+h,b),\quad v(a+h,b)], \\ C'[u(a+h,b+h),\quad v(a+h,b+h)], \\ D'[u(a,b+h),\quad v(a,b+h)]. \end{array}\right\} \tag{6}$$

整個正方形變成了圖 64 b 所示的曲線四邊形 $A'B'C'D'$。我們現在要想在 h 很小的假定下,來求這個曲線四邊形的面積的近似值。爲此,我們先用弦來代替曲線 $A'B'$, $B'C'$, $C'D'$, $D'A'$。然後計算有同樣頂點的直線四邊形 $A'B'C'D'$ 的面積 (圖 64 b), 或即三角形 $A'B'C'$ 與 $A'D'C'$ 的面積之和。按照大家都知道的解析幾何的公式,頂點爲 (u_1, v_1), (u_2, v_2), (u_3, v_3) 的三角形的面積等於行列式

$$\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & 1 \\ u_2 & v_2 & 1 \\ u_3 & v_3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_2-u_1 & v_2-v_1 \\ u_3-u_2 & v_3-v_2 \end{vmatrix}.$$

的絕對值的一半。因而我們得出三角形 $A'B'C'$ 的面積表達式

$$\pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} u(a+h,b)-u(a,b) & v(a+h,b)-v(a,b) \\ u(a+h,b+h)-u(a+h,b) & v(a+h,b+h)-v(a+h,b) \end{vmatrix} =$$

$$=\pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} u'_x(a+\theta_1 h,b)h & v'_x(a+\theta_2 h,b)h \\ u'_y(a+h,b+\theta_3 h)h & v'_y(a+h,b+\theta_4 h)h \end{vmatrix} =$$

$$=\pm\frac{h^2}{2}\begin{vmatrix} u'_x(a+\theta_1 h,b) & v'_x(a+\theta_2 h,b) \\ u'_y(a+h,b+\theta_3 h) & v'_y(a+h,b+\theta_4 h) \end{vmatrix},$$

其中 $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$ 都是 0 與 1 之間的數。

由於我們假定了函數 u 與 v 對於 x, y 的偏導數都是連續的,因而在我們所討論的 (閉) 區域上它們還都是一致連續的。由於在點 (a, b) 偏導數連續,所以對於充分小的 h, 上述最後的一個行列式的每一個

元素跟相應的偏導數在點 (a,b) 的值，相差得可以任意小，這也就是說，這個行列式與行列式

$$J(a,b)=\begin{vmatrix} u'_x(a,b) & v'_x(a,b) \\ u'_y(a,b) & v'_y(a,b) \end{vmatrix},$$

亦即函數 u, v 關於變量 x, y 在點 (a,b) 的奧斯特洛格拉得斯基行列式之差可以任意小。因此，當 $h\to 0$ 時，我們就有三角形 $A'B'C'$ 的面積表達式

$$\frac{h^2}{2}\left\{\left|J(a,b)\right|+o(1)\right\}=\frac{h^2}{2}\left|J(a,b)\right|+o(h^2);$$

完全類似的計算可以看出，三角形 $A'D'C'$ 的面積表達式也是這樣；所以，整個直線四邊形 $A'B'C'D'$ 的面積當 $h\to 0$ 時就等於

$$h^2\left|J(a,b)\right|+o(h^2). \tag{7}$$

這裏應當指出，以上得到的這個估計值，對於點 (a,b) 在我們所考慮的區域上的全部可能的位置，**一致地**成立 ❶。

現在我們剩下來要由直線四邊形 $A'B'C'D'$ 轉到曲線四邊形 $A'B'C'D'$。顯然，這兩個四邊形的面積之差不超過圖 64 中那四塊帶線條的狹小面積之和。因此，要想證明（7）式也表達了**曲線**四邊形 $A'B'C'D'$ 的面積，我們只需要證明這些帶線條的圖形的面積是 $o(h^2)$。當然，對於這四個圖形來說，計算方法是一樣的；我們下面以圖形 $A'B'$ 爲例(圖 65)。爲了簡單起見我們把點 A' 與 B' 的坐標分別記作 (u_0, v_0) 與 $(u_0+\Delta u, v_0+\Delta v)$。

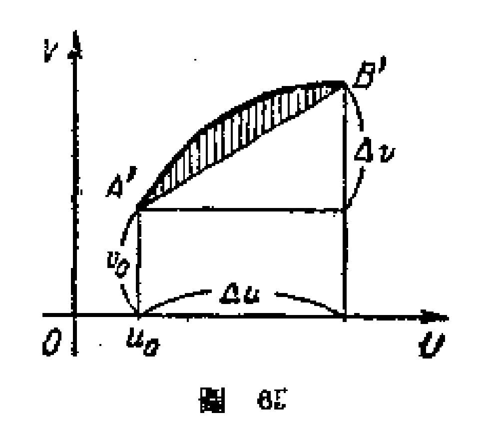


圖 65

假定 $J(a,b)\neq 0$；於是在點 (a,b) 偏導數 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}$ 中至少有一個不等於零。爲了確定起見，我們假定在點 (a,b) 有 $\frac{\partial u}{\partial x}>0$，於是只要 h 充分小，就在整個正方形

❶ 換句話說，當 $h\to 0$ 時，在給定的區域上，(7)式的第二項與 h^2 之比關於 a, b 一致地趨向於零。

$ABCD$ 上我們都有 $\frac{\partial u}{\partial x}>0$，當然，特別在這個正方形的 AB 邊上永遠有$\frac{\partial u}{\partial x}>0$。因此，當點$(x,y)$由 A 沿這條邊移動到B時，對應的點(u,v)在 u 遞增的方向上通過曲線 $A'B'$。因而我們可以把曲線 $A'B'$ 的方程表作 $v=f(u)$ 的形式，其中 $u_0\leqslant u\leqslant u_0+\Delta u$。顯然，直線段 $A'B'$ 的方程是

$$v=v_0+\frac{\Delta v}{\Delta u}(u-u_0)=f(u_0)+\frac{f(u_0+\Delta u)-f(u_0)}{\Delta u}(u-u_0).$$

所以圖 65 中帶線條的圖形的面積S就可以表作一個積分：

$$S=\int_{u_0}^{u_0+\Delta u}\left|f(u)-f(u_0)-\frac{u-u_0}{\Delta u}[f(u_0+\Delta u)-f(u_0)]\right|du.$$

因爲沿線段 AB，量 y 保持不變，所以 u,v 都是 x 一個變量的函數，因而我們有：

$$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx,\quad dv=\frac{\partial v}{\partial x}dx,$$

由此可見

$$\frac{dv}{du}=\frac{\frac{\partial v}{\partial x}}{\frac{\partial u}{\partial x}}.$$

因爲在 AB 段上$\frac{\partial u}{\partial x}\neq 0$，所以在$(u_0,u_0+\Delta u)$段上導數$f'(u)=\frac{dv}{du}$存在並且連續。因而我們得到：當 $u_0\leqslant u\leqslant u_0+\Delta u$ 時，

$$f(u)-f(u_0)=(u-u_0)f'(u_1),\quad f(u_0+\Delta u)-f(u_0)=\Delta u f'(u_2),$$

其中 u_1 與 u_2 都在 u_0 與 $u_0+\Delta u$ 之間。由於這一切，面積S可以改寫成

$$S=\int_{u_0}^{u_0+\Delta u}(u-u_0)\,|f'(u_1)-f'(u_2)|\,du,$$

由於函數 $f'(u)$ 的連續性，這個等式給出：當 $\Delta u\to 0$ 時，

$$S=o\left(\int_{u_0}^{u_0+\Delta u}(u-u_0)du\right)=o(\Delta u^2).$$

但是

$$\Delta u = u(a+h, b) - u(a, b)$$

當 $h \to 0$ 時與 h 是同級的無窮小量，所以我們得到

$$S = o(h^2).$$

而這就是我們要證明的。

因此，用變換(5)變換正方形 $ABCD$ 所成的曲線四邊形 $A'B'C'D'$ 的面積就等於表達式(7)，而且這個估計值與點 (a, b) 在我們所考慮的區域上的位置沒有關係。因爲正方形 $ABCD$ 的面積等於 h^2，所以變換後的面積與原來的面積之比等於

$$|J(a, b)| + o(1),$$

當 $h \to 0$ 時這個比的極限就等於 $|J(a, b)|$。

以上這個結果還可以大大地加以推廣。我們可以用任何一個足够簡單的包含點 $A(a, b)$ 的圖形來代替正方形 $ABCD$，然後把這個圖形縮小，使它的直徑趨向於零。只要這樣做（更細緻地分析就可以看出來，不過我們這裏不討論了），變換成的圖形的面積與原來圖形的面積之比總是以 $|J(a, b)|$ 爲極限。因此，變換(5)的奧斯特洛格拉得斯基行列式的絕對值，就可以看作是由變換(5)所引起的在點 (a, b) 的鄰域內的**面積的膨脹或收縮的係數**。這個結果在我們下篇中就要討論的重積分理論中具有極其重大的意義。奧斯特洛格拉得斯基行列式的這個幾何作用還可以擴張到任意多維的空間。例如，對於三維空間中的變換來說，變換的奧斯特洛格拉得斯基行列式就給出（整個在某一個給定點的鄰域內的，不大的幾何立體的）體積的膨脹或收縮係數。

§ 106. 條件極值

在本節中，我們要研究所謂**條件極值**（極大與極小）的初等理論。在這個理論中，隱函數理論得到了直接的應用。

假定在空間中給定了一個曲面，它的方程是

$$F(x, y, z)=0, \qquad (1)$$

現在要在這個曲面上來找出這樣的點，使得某個函數 $f(x, y, z)$ 在這種點所取的值與它在這個曲面上其他的點所取的值比起來是最大（或最小）。這句話用分析的語言來說，就是我們要找來使函數 $f(x, y, z)$ 取到最大值（或最小值）的數組 x, y, z，只能在所有能够滿足（1）式的那些數組中去找。這個問題與通常所提出的極值問題的區別就在於方程(1)的存在，換句話說，我們有興趣的只是去比較 $f(x, y, z)$ 在那些坐標能够滿足（1）式的點的函數值。

也有的情形，使給定的函數 f 取最大值或最小值的點，只許在一條由方程

$$\left.\begin{array}{l} F_1(x, y, z)=0 \\ F_2(x, y, z)=0 \end{array}\right\} \qquad (2)$$

表達的曲線上。同樣，這句話的分析意義也就是：要在全部滿足（2）式的數組 (x, y, z) 中，去找出使得函數 $f(x, y, z)$ 取最大值或最小值的那些數組來。

在所有這種類似的情形下，必需記住，我們談到的都只是函數 $f(x, y, z)$ 的**條件極值**，換句話說，我們只是要在滿足某種附加的**條件**（1）或（2）的點中，找出使得函數 $f(x, y, z)$ 取最大值或最小值的點。這些附加的條件通常稱爲給定的問題所特有的**連繫方程**。顯然，條件極值問題的最一般的形式可以說成是：要在滿足連繫方程

$$F_i(x_1, x_2, \cdots, x_n)=0 \qquad (i=1, 2, \cdots, m;\ m<n)$$

的一切點 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 中，找出給定的函數 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 取最大值或最小值的點。在這裏，跟在簡單極值問題的情形一樣，通常都是預先給定變量 x_i $(1\leqslant i\leqslant n)$ 取值的區域，提出的問題只在這個區域上考慮。

如果在這個區域上，我們可以由 m 個連繫方程確定出某 m 個變量（例如：$x_1, x_2, \cdots, x_m$）是其餘變量 $(x_{m+1}, \cdots, x_n)$ 的單值函數：

$$x_i=\varphi_i(x_{m+1}, x_{m+2}, \cdots, x_n) \qquad (i=1, 2, \cdots, m),$$

則把它們代入函數 f 中，我們就得到變量 $(x_{m+1},\cdots,x_n)$ 的一個函數，對於這個函數的極值我們就需要考慮一切的可能性，而不應該再對這些剩下來的變量加以任何限制，換句話說，我們的問題就化成了一個我們在 § 96 中已經討論過的簡單極值問題了。因此這就很清楚了，對於條件極值問題來說，連繫方程組對於這一組或那一組變量是否可解的問題，具有極其重大的意義，也就是由於此，條件極值的一般理論與隱函數的理論才有着密切的連繫。

爲了寫起來簡單一些同時看起來也清楚一些起見，我們以下只討論 $n=5, m=2$ 的特別情形。換句話說，我們只討論一個五元函數 $f(x,y,z,u,v)$ 的條件極值問題，連繫方程假定有兩個：

$$\left.\begin{aligned} F_1(x,y,z,u,v)=0,\\ F_2(x,y,z,u,v)=0. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

下面我們對於這個情形所進行的全部論證，完全可以類推到任意 n 與 m 的情形。正如我們討論簡單極值問題的情形一樣，也根據那裏同樣的理由，我們將只研究相對的(局部的)條件極值的判別法。而且自然也跟那裏一樣，只限於建立一些一般的必要性判別法，因爲要更深刻地來討論問題的細節，在這裏比在那裏還更少有可能。

因此，我們假定函數 $f(x,y,z,u,v)$ 在一個坐標滿足連繫方程(3)的點 $M(x_0,y_0,z_0,u_0,v_0)$ 所取的值，跟它在一切接近點 M 而且坐標也同樣滿足連繫方程(3)的點所取的值比起來是最大或最小。我們寫出以下這個二行五列的矩陣：

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial x} & \dfrac{\partial F_1}{\partial y} & \dfrac{\partial F_1}{\partial z} & \dfrac{\partial F_1}{\partial u} & \dfrac{\partial F_1}{\partial v} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial x} & \dfrac{\partial F_2}{\partial y} & \dfrac{\partial F_2}{\partial z} & \dfrac{\partial F_2}{\partial u} & \dfrac{\partial F_2}{\partial v} \end{pmatrix};$$

又假定由這個矩陣的元素所能構成的二階行列式中，至少有一個在點 M 不等於零。爲了確定起見，我們假定這個不爲零的就是行列式

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u} & \frac{\partial F_1}{\partial v} \\ \frac{\partial F_2}{\partial u} & \frac{\partial F_2}{\partial v} \end{vmatrix} = J.$$

於是（在函數 F_1 與 F_2 滿足通常的連續性與可微性條件的假定下）我們由 § 104 定理 1 知道：有唯一的一組函數

$$u=u(x,y,z),\quad v=v(x,y,z)$$

存在，在點 $P(x_0, y_0, z_0)$ 的某一個鄰域上恆等地滿足方程（3）並且

$$u(x_0, y_0, z_0)=u_0,\qquad v(x_0, y_0, z_0)=v_0.$$

此外，在點 P 的這個鄰域內，這兩個函數還都是連續的，並且對 x, y, z 三個變量都有連續的偏導數。

因爲按照所提出的問題的意思，我們有興趣的只是函數 $f(x, y, z, u, v)$ 在接近點 M 並且坐標能滿足連繫方程（3）的那些點的值，所以我們可以在 $f(x,y,z)$ 的表達式中分別用函數 $u(x,y,z)$ 與 $v(x,y,z)$ 來代替 u 與 v，因而可以肯定，這樣得到的一個 x, y, z 的函數

$$\varphi(x,y,z)=f[x,y,z,u(x,y,z),v(x,y,z)] \tag{4}$$

在點 $P(x_0, y_0, z_0)$ 應該有一個簡單的（通常的）局部極值。因此根據 § 96，在點 P 我們應該有：

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{\partial\varphi}{\partial y}=\frac{\partial\varphi}{\partial z}=0;$$

由於函數 φ 的表達式（4），這就給出：

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=0, \\ \frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=0, \\ \frac{\partial f}{\partial z}+\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial z}=0. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

要想這些方程的左端可以看成是 x, y, z, u, v 的已知函數，我們還應該通過已知的函數來表達 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}, \frac{\partial v}{\partial z}$。但是，這無非是隱函數的微分法的問題，在 § 104 中我們已經詳細討論過了。跟在

那裏一樣，我們關於 x, y, z 微分恆等式

$$F_1[x, y, z, u(x, y, z), v(x, y, z)]=0,$$
$$F_2[x, y, z, u(x, y, z), v(x, y, z)]=0$$

就可以得到：

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial F_1}{\partial x}+\frac{\partial F_1}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial F_1}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=0,\\ \frac{\partial F_2}{\partial x}+\frac{\partial F_2}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial F_2}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=0.\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

以及關於 y 與 z 的導數的類似的四個等式。跟以前一樣，我們可以由(6)式出發，用函數 F_1 與 F_2 的偏導數來表達 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 與 $\frac{\partial v}{\partial x}$(方程組(6)的行列式就是 J，因而按照假設在點 M，從而也就在 M 的某個鄰域內，不等於零)。顯然，從類似於(6)的關於 y 與 z 的式子中，也可以求出 $\frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}, \frac{\partial v}{\partial z}$ 的類似的表達式。把這些表達式代入(5)式，我們就得到三個方程，它們的左端現在已經是 x, y, z, u, v 的已知函數了。把這些方程與連繫方程(3)併在一起，我們就有了五個方程，它們的左端都是 x, y, z, u, v 的已知函數。我們已經證明了，只要點 M 給出我們所要的條件極值，它的坐標就滿足這五個有五個未知數的方程。因此我們很自然地把滿足這個方程組的每一組數 (x, y, z, u, v) 稱為我們所提出的問題的一個**穩定點**。於是，我們所得到的結果，跟以前關於簡單極值所得到的結果一樣，可以敍述如下：在給定的函數滿足通常的連續性與可微性條件的假定下，函數的局部條件極值只可能在穩定點取到。當然，至於這個或那個穩定點是否的確給出函數 f 的局部條件極值，以及如果的確給出這種極值時，這個極值的性質又究竟怎樣，——所有這些問題在前面的討論中都沒有解決，因而還需要專門的研究。

我們知道，確定穩定點的五個方程中的前面三個是這樣得到的：由線性方程組(6)中解出 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 與 $\frac{\partial v}{\partial x}$，然後把這個解代入(5)中的第一個方程，關於 y 與 z 的導數也進行同樣的運算，並分別代入(5)式的第二與第三個方程。當然，要實際進行這些簡單的運算，因而使得最後的方

程組能夠明明白白地寫出來(顯然,它只含有函數 f, F_1 與 F_2 對於五個變量的偏導數),倒並不是什麼難事。不過我們從來沒有這樣做過而且以後也永遠不會這樣做,因爲實際上,在絕大多數的情形下,要得到確定穩定點的最後的方程組,我們總是用另外一種更方便的所謂"未定因子法"的方法。現在我們就來說明,這個方法應該怎麼樣來進行。

我們剛才所說的那一連串運算,——從九個方程((5),(6) 以及跟 (6) 相類似的,函數 u 與 v 關於 y, z 的偏導數的四個方程)中消去六個未知數 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}, \frac{\partial v}{\partial z}$ ——按其本質來說,顯然都是初等的代數運算。當然,這樣一種消元,是可以用各種不同的方法來完成的。特別是,我們以前的步驟是這樣:從後面的六個方程中求出要消去的六個未知數,然後把它們代入方程 (5)。但是由於它的不對稱性,這個方法在實際上是不方便的:在這個方法中變量 u, v 所起的作用實質上跟其餘的變量 x, y, z 所起的作用是不同的。我們以下敍述的未定因子法的根本優越之處,就在於在應用這個方法的過程中,五個變量都處於同樣的地位。

我們仍然假定點 $M(x_0, y_0, z_0, u_0, v_0)$ 給出函數 f 的一個局部條件極值,並且保留以前對於函數 f, F_1 與 F_2 在點 M 的鄰域上所作的假定。於是方程組

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial u}+\lambda_1\frac{\partial F_1}{\partial u}+\lambda_2\frac{\partial F_2}{\partial u}=0,\\ \frac{\partial f}{\partial v}+\lambda_1\frac{\partial F_1}{\partial v}+\lambda_2\frac{\partial F_2}{\partial v}=0.\end{aligned}\right\}\tag{7}$$

(其中所有的偏導數都在點 M 取值)有唯一的一組解 (λ_1, λ_2)。把方程 (6) 分別乘以 λ_1 與 λ_2,然後再與方程組 (5) 中的第一個逐項相加。根據 (7) 式,我們就得到:在點 M,有

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\lambda_1\frac{\partial F_1}{\partial x}+\lambda_2\frac{\partial F_2}{\partial x}=0.\tag{8}$$

如果我們再寫出跟(6)式類似的關於 y 與 z 的導數的方程,然後用剛才

所說的那種辦法，分別跟方程組 (5) 中的第二個與第三個方程併起來，則很明顯，我們又得到跟 (8) 式完全類似的兩個方程：

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y}+\lambda_1\frac{\partial F_1}{\partial y}+\lambda_2\frac{\partial F_2}{\partial y}=0,\\ \frac{\partial f}{\partial z}+\lambda_1\frac{\partial F_1}{\partial z}+\lambda_2\frac{\partial F_2}{\partial z}=0.\end{aligned}\right\}\qquad(9)$$

(7), (8), (9) 三式中的五個方程顯然關於五個變量 x, y, z, u, v 是完全對稱的。再加上兩個連繫方程我們就得到七個未知數 $x, y, z, u, v, \lambda_1, \lambda_2$ 的七個方程，在給定的函數滿足通常的連續性與可微性條件的假定下，每一個穩定點都應當滿足這七個方程。

如果我們在考慮給定的函數 f 的同時，還考慮同樣這些變量的函數

$$\Phi=f+\lambda_1F_1+\lambda_2F_2,$$

其中 λ_1 與 λ_2 是尙未確定的數因子，則我們前面得到的方程 (7), (8), (9) 可以寫成

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}=\frac{\partial \Phi}{\partial y}=\frac{\partial \Phi}{\partial z}=\frac{\partial \Phi}{\partial u}=\frac{\partial \Phi}{\partial v}=0,$$

因而恰好是求函數 Φ 的簡單極值時我們會得到的那一組方程。因此，求函數 f 的條件穩定點的問題就化成了求函數 Φ 的簡單穩定點的問題，這樣一個從條件極值問題到簡單極值問題的轉化，實際上就是未定因子法的功用。我們已經看到了，確定函數 f 的條件穩定點的方程組比起確定簡單穩定點的方程組要多出兩個未知數(λ_1 與 λ_2)，因而方程的數目也就多了兩個；這是因爲加上了兩個在簡單極值情形所沒有的連繫方程的緣故。

例　拋物體

$$x^2+y^2=z\qquad(10)$$

被平面

$$x+y+z=1\qquad(11)$$

截成一個橢圓。求這個橢圓到坐標原點的最長與最短距離。

顯然，分析地說來，這個問題就是要求函數

$$x^2+y^2+z^2$$

在連繫條件(10)與(11)之下的最大值與最小值。根據未定因子法，我們造函數

$$\Phi(x,y,z)=x^2+y^2+z^2+\lambda_1(x^2+y^2-z)+\lambda_2(x+y+z-1)$$

然後讓它的三個偏導數都等於零；這就給出

$$x=y=-\frac{\lambda_2}{2(\lambda_1+1)},\quad z=\frac{\lambda_1-\lambda_2}{2};$$

把這些值代入連繫方程(10)與(11)中，我們不難算出：

$$\lambda_1=-3\pm\frac{5}{3}\sqrt{3},\quad \lambda_2=-7\pm\frac{11}{3}\sqrt{3},$$

因而

$$x=y=\frac{-1\pm\sqrt{3}}{2},\quad z=2\mp\sqrt{3}.$$

對於量 $x^2+y^2+z^2$，這就給出兩個值 $9\mp5\sqrt{3}$。因為在給定的問題中極值的存在由幾何上看來是顯然的，所以得到的兩個穩定點也就不需要再做補充的研究。而我們的問題就已經可以認為是解決了。

作為更多的練習讀者可以參看 Б. П. 捷米多維奇的習題集，第六章，習題 447, 448, 456, 465。



第六篇　積分學的進一步發展

第二十五章　廣義積分

§ 107. 無窮積分

在這一章中，我們研究定積分概念的兩個推廣。這兩個推廣，無論是在理論的進一步發展中，或者在應用上，都具有重大的意義。

函數 $y=\frac{1}{x^2}$ 在區間 $x\geqslant 1$ 上是正的，連續的，隨着 x 的增大而不斷地減小，並且當 $x\to\infty$ 時，趨向於零。我們來考慮位於曲線 $y=\frac{1}{x^2}$ 之下，OX 軸之上，在橫坐標 1 與 $b>1$ 之間的面積；我們知道，這個面積（圖 66）可以表作積分

$$\int_1^b \frac{dx}{x^2}=1-\frac{1}{b}. \tag{1}$$

如果我們讓 b 增大，則我們所考慮的面積也增大；如果 b 無限增大，則雖然圖 66 中帶斜線的部分無限制地往右延伸，但是它的面積如(1)式所指出的，却始終保持有界，而且事實上它趨向於 1。這個現象讓我們立刻想起正項收斂級數（例如簡單的幾何級數）求和的情形；正像在那裏，級數的部分和，因它所包含的項越來越多而逐漸增大，但是它並非無限制地增大，而是逼近於某一個有限的極限，在這裏也一樣，

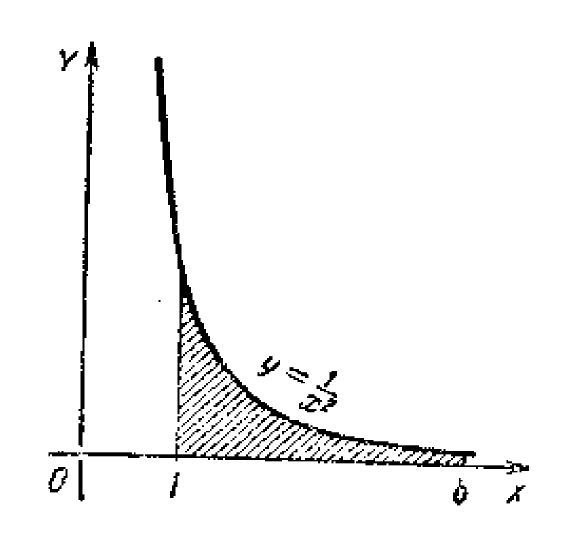


圖　66

隨着 b 的增大，帶斜線的區域的面積也就越來越大，不斷地增大，但是同樣在這裏也不是無限制地增大，而是趨向於某一個有限的極限的。很自然地，正像在那裏我們把部分和的極限就了解成級數的"一切"項的和一樣，在這裏我們也很自然地把帶斜線的區域面積的極限，了解作位於曲線 $y=\frac{1}{x^2}$ 之下，OX 軸之上，直線 $x=1$ 之右向右延伸到無窮的圖形的面積。

不過在級數的情形，只是收斂級數的部分和才有極限存在，並且我們知道，的確有這樣的級數，它的項是正的，單調減小而且趨向於零，但是它是發散的，因而它的部分和無限制地增大，不趨向於任何極限（例如調和級數）。對於我們所考慮的延伸到無窮的圖形的面積問題，同樣的情况也是完全可能的。例如，曲線 $y=\frac{1}{x}$ 在區間 $x>1$ 上的變化狀態，跟曲線 $y=\frac{1}{x^2}$（圖 66）基本上是一樣的；但是當 $b\to\infty$ 時，

$$\int_1^b \frac{dx}{x}=\ln b\to\infty.$$

所以在這個情形下，帶斜線的圖形的面積隨着 b 的增大而**無限制**地增大，因而整個延伸到無窮遠的圖形就沒有有限的面積。

現在我們假定有函數 $f(x)$ 對於任意大的 b 都在區間 (a,b) 上可積，當極限

$$\lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\,dx \tag{2}$$

存在時，我們把它稱爲函數 $f(x)$ 在區間（半直線）$(a,+\infty)$ 上的（或者從 a 到 $+\infty$ 的）**廣義積分**，記作

$$\int_a^\infty f(x)\,dx\,. \tag{3}$$

如果極限（2）存在，我們就說積分（3）是**收斂的**，而極限（2）就是這個積

分的值。如果極限(2)不存在，我們就說積分(3)是發散的，它沒有值。在這裏，函數$f(x)$顯然沒有必要一定要是正的與單調的；要想我們以上給的定義有意義，顯然只要函數$f(x)$對任意的$b>a$時，在區間(a,b)上可積；特別說來，只要假定函數$f(x)$在區間$x\geqslant a$上連續就已經足够了。當然，在這種一般的情形，我們由之開始的，積分(3)的那種幾何解釋就沒有什麼意義了。

到現在爲止，我們一直是假定積分的下限保持不變，只是上限無限制地增大。顯然，反過來，我們可以完全一樣地討論上限b保持不變，而只是負的下限a其絕對值無限增大$(a\to-\infty)$的情形。如果對於任何$a<b$，函數$f(x)$在區間(a,b)上可積，又假定極限

$$\lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\,dx \tag{4}$$

存在，則我們把這個極限記作

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx \tag{5}$$

並且說這個積分(5)收斂，並且它的值就等於極限(4)。如果這個極限不存在，則積分(5)稱爲是發散的，這時，我們就不能說它等於多少。

最後，也可能有這種情形：同時而又彼此獨立無關地，$a\to-\infty$與$b\to\infty$，換句話說，積分區間延伸成整個數軸的情形。我們同意說積分

$$\int_a^b f(x)\,dx=I(a,b)$$

趨向於一個極限I，並且記作

$$\lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to+\infty}} I(a,b)=I, \tag{6}$$

只要對於任意的$\varepsilon>0$，都可以找到這樣一個$A>0$，使得當$a<-A$，

$b>A$ 時，永遠有：

$$|I(a,b)-I|<\varepsilon.$$

很明顯，極限(6)存在的必要充分條件，是積分

$$\int_0^{+\infty} f(x)\,dx \text{ 與 } \int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx$$

都收斂，並且在這種情形，極限(6)就等於這兩個積分的和。如果極限(6)存在，我們把它記作

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx, \tag{7}$$

並且我們說積分(7)收斂；如果不然，我們就說積分(7)發散，同樣，這時我們也不能說它的數值是多少。

例 1. 因為

$$\int_a^b \frac{dx}{1+x^2}=\operatorname{arc\,tg} b-\operatorname{arc\,tg} a,$$

所以

$$\lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to+\infty}}\int_a^b \frac{dx}{1+x^2}=\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\pi;$$

因而積分

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}$$

收斂並且等於 π。

例 2. 因為

$$\int_a^b \cos x\,dx=\sin b-\sin a$$

又因為當 $x\to\infty$ 時，$\sin x$ 沒有極限，所以積分

$$\int_{a}^{+\infty} \cos x \, dx, \quad \int_{-\infty}^{b} \cos x \, dx, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \cos x \, dx$$

都發散，因而都沒有數值。

例 3. 因爲

$$\int_{a}^{b} e^x \, dx = e^b - e^a,$$

所以積分

$$\int_{-\infty}^{b} e^x \, dx$$

收斂並且等於 e^b（因爲當 $a \to -\infty$ 時，$e^a \to 0$）。反之，積分

$$\int_{a}^{+\infty} e^x \, dx$$

發散（因爲當 $b \to +\infty$ 時，$e^b \to \infty$）。所以積分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^x \, dx$$

也發散。

無窮級數與廣義積分的類似之處，使得我們可以沿用建立無窮級數的收斂判別法的那種方法來建立廣義積分的收斂判別法。爲了確定起見，我們今後只考慮 $\int_{a}^{\infty}$ 型的積分；不過事實上我們所得到的一切結果都可以在本質上毫無改變地類推到 $\int_{-\infty}^{b}$ 與 $\int_{-\infty}^{+\infty}$ 型積分的情形。

首先，§ 19 中的一般性定理 2 告訴我們，廣義積分

$$\int_{a}^{\infty} f(x) \, dx \tag{8}$$

收斂的一個必要充分條件應該是：對於任意的 $\varepsilon>0$，只要 b_1 與 b_2 充分大，就有：

$$\left|\int_a^{b_2} f(x)\,dx-\int_a^{b_1} f(x)\,dx\right|<\varepsilon.$$

因爲

$$\int_a^{b_2} f(x)\,dx-\int_a^{b_1} f(x)\,dx=\int_{b_1}^{b_2} f(x)\,dx,$$

所以我們得到以下的判別準則。

定理 1. 積分 (8) 收斂的必要充分條件是：不管 $\varepsilon>0$ 多麼小，對於一切充分大的 b_1，與 b_2 都有不等式

$$\left|\int_{b_1}^{b_2} f(x)\,dx\right|<\varepsilon.$$

（換句話說，要想一個廣義積分收斂，必需而且只需它在任何充分遠(不管多長)的"一段"上的值是任意小)。

跟同號級數收斂的必要充分條件就是它的部分和有界一樣，顯然對於具有非負的被積函數 $f(x)$ 的積分 (8) 來說，它收斂的必要充分條件就是當 $b\to\infty$ 時，積分

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

有界。利用這個事實就不難建立跟同號級數的比較原則(§68 定理 1)完全類似的積分的比較原則：

定理 2. 如果當 $a\leqslant x<+\infty$ 時，我們有 $0\leqslant f(x)\leqslant c\,\varphi(x)$（其中 c 是一個大於零的常數），又如果函數 $f(x)$ 與 $\varphi(x)$ 在任何區間 (a,b) $(a<b)$ 上都可積，則從積分

$$\int_a^{\infty} \varphi(x)\,dx$$

收斂就可以推出積分

$$\int_a^\infty f(x)\,dx$$

收斂，並且還有不等式

$$\int_a^\infty f(x)\,dx \leqslant c\int_a^\infty \varphi(x)\,dx$$

成立。

證明的方法與證明級數的比較原則完全類似，因此我們留給讀者自己去證明。

例 4. 因為對於固定的 α，當 $x\to+\infty$ 時我們永遠有 $x^\alpha e^{-\frac{1}{2}x}\to 0$（§37 例 7），所以對於充分大的 x，有

$$x^\alpha e^{-\frac{1}{2}x}<1,$$

因而

$$x^\alpha e^{-x}=x^\alpha e^{-\frac{1}{2}x}e^{-\frac{1}{2}x}<e^{-\frac{1}{2}x}.$$

因此，從積分

$$\int_1^\infty e^{-\frac{1}{2}x}\,dx$$

收斂，立刻推出對於任何的 α，積分

$$\int_1^\infty x^\alpha e^{-x}\,dx$$

都收斂。

例5. $\int\limits_1^\infty e^{-x}\,dx=\frac{1}{e}$ 收斂。又因為當 $x\geqslant 1$ 時，$e^{-x^2}\leqslant e^{-x}$，所以積分

$$\int_1^\infty e^{-x^2}\,dx$$

也收斂，雖然它的值我們還不知道。

我們現在不再詳細敍述廣義積分的那些跟無窮級數的相應的性質完全類似，證明方法一樣，甚至於證明起來也同樣容易的簡單性質了。例如，我們不難證明，在有限區間上用任何方法改變函數 $f(x)$（只要不破壞它的可積性），都不影響積分(8)的收斂性（當然，一般說來，它的值要改變）。又如，如果積分

$$I_1=\int_a^\infty f_1(x)\,dx,\quad I_2=\int_a^\infty f_2(x)\,dx$$

都收斂，則積分

$$I=\int_a^\infty \{f_1(x)\pm f_2(x)\}\,dx$$

也收斂，並且

$$I=I_1\pm I_2.$$

如果積分

$$\int_a^\infty |f(x)|\,dx \tag{9}$$

收斂，我們就說積分(8)絕對收斂。由積分(9)的收斂性，可以立刻推出積分(8)收斂；事實上如果積分(9)收斂，則根據定理 1，不管 $\varepsilon>0$ 多麼小，對於一切充分大的 b_1 與 b_2，我們都有：

$$\left|\int_{b_1}^{b_2}|f(x)|\,dx\right|<\varepsilon.$$

但是我們知道（§51 最後一個定理）

$$\left|\int_{b_1}^{b_2}f(x)\,dx\right|\leqslant\left|\int_{b_1}^{b_2}|f(x)|\,dx\right|;$$

因此對於充分大的 b_1 與 b_2，有

$$\left|\int_{b_1}^{b_2} f(x)\,dx\right| < \varepsilon,$$

再根據定理1，我們就知道積分(8)收斂。

跟無窮級數的情形一樣，定理2（比較原則）使得我們不難對廣義積分也建立起一系列具體的，實際應用起來很方便的收斂判別法；現在我們提出這類簡單判別法中的幾個來簡單地談一談。

定理 3. 如果 $\alpha>1$，又對於一切充分大的 x 都有不等式 $|f(x)|<cx^{-\alpha}$，其中 $c>0$ 是一個常數，則積分(8)絕對收斂；反之，如果 $\alpha\leqslant 1$，又對於一切充分大的 x 我們有 $f(x)>x^{-\alpha}$，則積分(8)發散。

這裏，函數 $f(x)$ 照例假定是在任何有限區間 (a, b) $(a<b)$ 上可積的。

因為積分

$$\int_a^\infty x^{-\alpha}\,dx$$

（其中 $a>0$）當 $\alpha>1$ 時收斂，當 $\alpha\leqslant 1$ 時發散，所以定理3直接就可以由定理2推出來；至於這裏不等式只要求對於充分大的 x 成立，當然是因為在有限區間上改變函數 $f(x)$ 並不影響積分(8)的收斂性的緣故。

由定理3可以立刻推知，像這樣的一些積分都是絕對收斂的，例如

$$\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^2}\,dx, \quad \int_0^\infty \frac{x\,dx}{(1+x)^3}$$

等等。然而定理3所表達的收斂判別法，雖然有大量的具體應用，但畢竟還是比較粗糙的判別法，因為利用這個判別法（由它的敍述本身就可以看得很清楚）只能夠判別積分是否絕對收斂（在這一方面，更為有效的判別法也是不難得到的）。因此，我們還要引進另一個在實質上更為精確的判別法。

定理 4. 如果 $a>0, \alpha>0$，函數 $\varphi(x)$ 當 $x \geqslant a$ 時連續，並且有這樣一個正常數 C 存在，使得對於一切 $b>a$ 都有：

$$\left|\int_a^b \varphi(x)\,dx\right| < C,$$

則積分

$$\int_a^\infty \frac{\varphi(x)}{x^\alpha}\,dx$$

收斂。

證明．令

$$\int_a^x \varphi(u)\,du = \Phi(x),$$

於是

$$|\Phi(x)| < C \qquad (a < x < +\infty).$$

於是，根據分部積分法，得到：

$$\int_a^x \frac{\varphi(u)}{u^\alpha}\,du = \int_a^x \frac{\Phi'(u)}{u^\alpha}\,du = \left(\frac{\Phi(u)}{u^\alpha}\right)\Bigg|_a^x + \alpha\int_a^x \frac{\Phi(u)}{u^{\alpha+1}}\,du.$$

如果現在讓 x 無限增大，則右端的第一項趨向於零，因爲

$$\left|\frac{\Phi(x)}{x^\alpha}\right| < \frac{C}{x^\alpha} \to 0 \qquad (x\to\infty),$$

又按照函數 $\Phi(x)$ 的定義，$\Phi(a)=0$。至於右端的第二項，則當 $x\to\infty$ 時以積分

$$\alpha\int_a^\infty \frac{\Phi(u)}{u^{\alpha+1}}\,du \tag{10}$$

爲極限，這裏，這個積分由於 $\alpha>0$ 與 $|\Phi(u)|<C$，按照定理 3 是（絕對）收斂的。因此，極限

$$\lim_{x\to\infty}\int_a^x \frac{\varphi(u)}{u^\alpha}du=\int_a^\infty \frac{\varphi(u)}{u^\alpha}du$$

存在(它的值就等於絕對收斂積分(10)的值)。

利用定理 4，不難證明大量的，在各種各樣的應用中起着重要作用的積分的收斂性；積分

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx \tag{11}$$

就是這種積分的一個典型。根據定理 4，這個積分收斂，因為

$$\left|\int_0^x \sin u\,du\right|=|1-\cos x|\leqslant 2 \qquad (0<x<+\infty).$$

我們可以證明積分(11)不是絕對收斂的(或者另一個說法，是條件收斂的)，換句話說，積分

$$\int_a^\infty \frac{|\sin x|}{x}dx$$

$(a>0)$ 是發散的。因為我們永遠有 $|\sin x|\geqslant \sin^2 x$，所以根據比較原則(定理 2)，只要證明積分

$$\int_a^\infty \frac{\sin^2 x}{x}dx=\int_a^\infty \frac{1-\cos 2x}{2x}dx \tag{12}$$

發散就行了，但是積分

$$\int_a^\infty \frac{\cos 2x}{2x}dx \tag{13}$$

跟積分(11)是同一類型的積分，只要用一下定理 4 就可以證明它收斂。因此，如果積分(12)收斂，則加上積分(13)之後，它們的和，也就是

$$\int_a^{\infty} \frac{dx}{2x},$$

也應該收斂，然而這是不正確的；因此，積分(12)發散，從而積分(11)只是條件收斂。事實上，所有的積分

$$\int_a^{\infty} \frac{\sin x}{x^{\alpha}} dx, \quad \int_a^{\infty} \frac{\cos x}{x^{\alpha}} dx$$

都是這樣的，只要 $0 < \alpha \leqslant 1$。

關於練習可以參看 Б. П. 捷米多維奇的習題集，第四章，習題 108，109，111，120。

在整個這一節中，我們已經不止一次地看到無窮級數與廣義積分的類似之處，怎樣在確定無窮積分的基本概念與建立無窮積分的重要性質時起着重要的作用。現在我們來指出，由廣義積分的概念，反過來也可以對無窮級數理論作出具有頭等價值的結論；利用廣義積分的概念，我們來建立一個同號級數的收斂判別法，在許多情形下，這個判別法的效力以及具體應用起來的便利都要超過在 § 68 中所證明的一切初等判別法。

定理 5（級數的哥西收斂判別法）。假定 $f(x)$ 是確定在整個 $x \geqslant a$ 上的一個正的不增的連續函數，其中 a 是某一個自然數。於是級數

$$f(a)+f(a+1)+\cdots+f(a+k)+\cdots \tag{14}$$

與積分

$$\int_a^{\infty} f(x)\, dx \tag{15}$$

同時收斂或者同時發散。

證明．因為函數 $f(x)$ 是不增的，所以當 $a+k \leqslant x \leqslant a+k+1$ 時，我們有 $f(a+k) \geqslant f(x) \geqslant f(a+k+1)$，因此

$$f(a+k)\geqslant\int_{a+k}^{a+k+1}f(x)\,dx\geqslant f(a+k+1)\qquad(k=0,1,2,\cdots).$$

把這些不等式按照 k 從 0 到 n 加起來,我們得到:

$$\sum_{k=0}^{n}f(a+k)\geqslant\int_{a}^{a+n+1}f(x)\,dx\geqslant\sum_{k=0}^{n}f(a+k+1).$$

如果積分(15)收斂,則當 $n\to\infty$ 時,這個不等式的中間項保持有界;它的右端就更有界,由此可見正項級數(14)收斂。如果積分(15)發散,則中間項當 $n\to\infty$ 時就無限增大;而左端就更是如此,這說明級數(14)發散。這就證明了定理 5。

例 6. 在 §68 中,我們考慮過非常重要的一類同號級數:

$$\frac{1}{1^s}+\frac{1}{2^s}+\cdots+\frac{1}{n^s}+\cdots\tag{16}$$

並且證明了當 $s>1$ 時級數(16)收斂,當 $s\leqslant1$ 時發散。利用定理 5,級數(16)的收斂性問題立刻可以得到解決。在定理 5 中令 $a=1,f(x)=x^{-s}$,我們知道,級數(16)收斂與否跟積分

$$\int_{1}^{\infty}x^{-s}\,dx$$

收斂與否相同,而後者當 $s>1$ 時收斂,$s\leqslant1$ 時發散。

例 7. 我們來考慮更爲精密的關於

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^s}\tag{17}$$

型級數的收斂問題,其中 s 是一個實常數。不難驗證,當 $s>0$ 時沒有一個 §68 中的判別法能解決這類級數的收斂問題。但是利用定理 5,這個問題可以很簡單地得到解決。令 $a=2$, $f(x)=\frac{1}{x(\ln x)^s}$; 於是級數(17)的收斂性與積分

$$\int_{2}^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^{s}} \tag{18}$$

的收斂性等價。但因為

$$\int_{2}^{x} \frac{du}{u(\ln u)^{s}} = \begin{cases} \frac{1}{1-s}\{(\ln x)^{1-s} - (\ln 2)^{1-s}\} & (s \neq 1), \\ \ln \ln x - \ln \ln 2 & (s = 1), \end{cases}$$

所以積分(18)當 $s>1$ 時收斂$\left(\text{它的值等於} \frac{1}{(s-1)(\ln 2)^{s-1}}\right)$，當 $s \leqslant 1$ 時發散；因而，級數(17)也當 $s>1$ 時收斂，當 $s \leqslant 1$ 時發散。這樣一來，特別是級數

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$$

發散，級數

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^{2} n}$$

收斂。

進一步的練習可以參看 Б. П. 捷米多維奇的習題集，第五章，習題 64。

§ 108. 無界函數的積分

到現在為止，我們在確定積分概念時，總是假定了被積函數在整個積分區間上是有界的。現在我們來看一看積分概念的這樣一種推廣，這種推廣的主要之點就是在某些情形下允許被積函數無界。跟在 § 107 中一樣，我們從簡單的例子開始。假設在區間 $(0,1)$ 上確定一個函數 $f(x)$ 如下：

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}} & (0 < x \leqslant 1), \\ 0 & (x = 0). \end{cases}$$

因爲當 $x\to 0$ 時，$\frac{1}{\sqrt{x}}$ 無限增大，所以函數 $f(x)$ 在區間(0,1)上是無界的。函數 $f(x)$ 在 $x=0$ 有一個間斷點，但是在區間(0,1)上其他的點都是連續的。它的圖形如圖 67 所示。顯然，對於無論怎樣小的 $\varepsilon>0$，我們都可以在區間(ε, 1)上積分函數 $f(x)$，並且它的積分

$$\int_{\varepsilon}^{1} f(x)\,dx=\int_{\varepsilon}^{1}\frac{dx}{\sqrt{x}}=(2\sqrt{x})\Big|_{\varepsilon}^{1}=2(1-\sqrt{\varepsilon})\tag{1}$$

就是圖 67 中帶斜線部分的面積。當 ε 減小時，這個面積不斷地增大；如果 $\varepsilon\to 0$，則帶斜線部分無限制地向上延伸；然而它的面積，如公式(1)所指出的，並不無限增大，而是趨向於極限 2。很自然地，我們就把這個極限了解作在 OX 軸的區間(0,1)之上，曲線 $y=\frac{1}{\sqrt{x}}$ 之下的區域的面積。在這個幾何說明中，我們又遇到這種事情，就是我們可以很自然地賦予一個無限延長的圖形以有限的面積。其實，只要比較一下圖 67 與圖 66，我們立刻可以發現這兩個圖形有非常相似的地方。

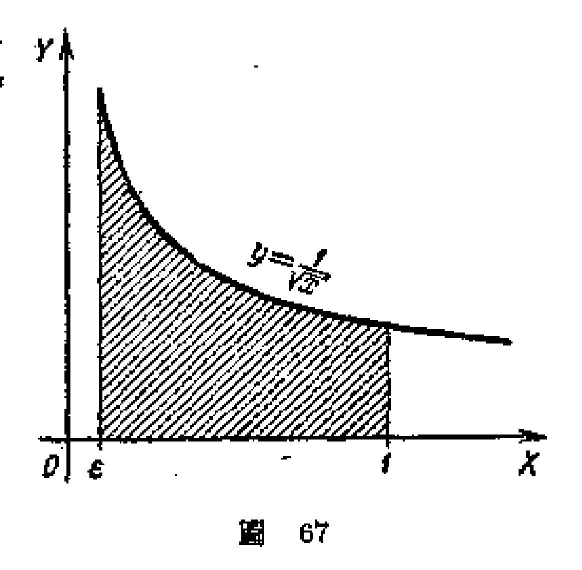


圖 67

至於就純粹分析的語言來說，則事情是這樣的，我們不能夠利用積分

$$\int_{0}^{1} f(x)\,dx$$

來確定我們剛才談到的這個面積，因爲被積函數在區間(0.1)上無界。但是我們可以算作這個面積就等於極限值

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{1} f(x)\,dx;\tag{2}$$

這裏，對於無論怎樣小的 $\varepsilon>0$，積分

$$\int_{\varepsilon}^{1} f(x)\,dx$$

都是有意義的，因為被積函數在積分區間 $(\varepsilon, 1)$ 上連續。

極限（2）稱為無界函數 $f(x)$ 從 0 到 1（或者在區間 $(0,1)$ 上）的（廣義）積分，乾脆就記作

$$\int_{0}^{1} f(x)\,dx.$$

這樣一來，我們就可以寫

$$\int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\varepsilon}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2.$$

現在我們來考慮一般的定義。假定函數 $f(x)$ 確定在區間 (a, b) 上，又無論 $\varepsilon>0$ 怎樣小，它在區間 $(a+\varepsilon, b)$ 上都是可積的（因而也是有界的），但是在整個區間 (a, b) 上無界。於是，如果極限

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx \tag{3}$$

存在，我們就把這個極限稱為**無界函數** $f(x)$ 在區間 (a, b) 上的（廣義）**積分**，簡單地記作

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx. \tag{4}$$

這時，積分（4）稱為是收斂的；在極限（3）不存在時，我們說積分（4）發散，這時它沒有數值。

以上我們看到，積分概念的這個推廣，是在被積函數只在積分區間上一個點的鄰近無界，而在這個區間的其他部分有界而且可積的情形下採用的。特別在我們的例子中，隨後在我們一般定義中，這個"例外

點"就是積分區間的左端點 a。然而，很清楚，這個定義可以很自然地推廣到"例外點"是在積分區間上任何位置的情形。例如，如果函數 $f(x)$ 對於任何 $\varepsilon>0$ 都在區間 $(a, b-\varepsilon)$ 上可積，但是在整個區間 (a, b) 上無界，又如果積分

$$\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$$

當 $\varepsilon\to 0$ 時趨向於一個極限，則我們可以作爲定義令

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx;$$

在這裏，例外點就是積分區間的右端點 b。最後，如果這種例外點是區間 (a, b) 的某一個內點 c，換句話說，如果函數 $f(x)$，無論 $\varepsilon_1>0$ 與 $\varepsilon_2>0$ 怎樣小，都在區間 $(a, c-\varepsilon_1)$ 與 $(c+\varepsilon_2, b)$ 上可積，則我們可以直接算作

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx,$$

其中右端的兩個積分都是以積分區間的端點 c 作爲例外點的廣義積分，因而我們可以認爲它們是已經確定了的。當然，在這個情形，積分

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

收斂的必要充分條件就是下列兩個極限同時存在：

$$\lim_{\varepsilon_1\to 0}\int_a^{c-\varepsilon_1} f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx.$$

$$\lim_{\varepsilon_2\to 0}\int_{c+\varepsilon_2}^b f(x)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx.$$

我們已經注意到，在被積函數爲正的情形，無界函數的積分問題的

幾何說明，跟我們在 §107 中所講的無窮積分的幾何說明很相似。其實不難證實，在這兩個問題之間，有着密切的純粹分析的聯繫。例如，假定函數 $f(x)$在積分區間的左端點 a 的鄰近是無界的，於是

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\epsilon\to 0}\int_{a+\epsilon}^b f(x)\,dx. \tag{5}$$

作變量替換 $x=a+\frac{1}{y}$，就得出

$$\int_{a+\epsilon}^b f(x)\,dx = \int_{\frac{1}{b-a}}^{\frac{1}{\epsilon}} f\left(a+\frac{1}{y}\right)\frac{dy}{y^2} = \int_{\frac{1}{b-a}}^{\frac{1}{\epsilon}} \varphi(y)\,dy,$$

其中我們令

$$\varphi(y)=\frac{1}{y^2}f\left(a+\frac{1}{y}\right).$$

因此，(5)式給出

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\epsilon\to 0}\int_{\frac{1}{b-a}}^{\frac{1}{\epsilon}} \varphi(y)\,dy = \int_{\frac{1}{b-a}}^{\infty}\varphi(y)\,dy,$$

所以，無界函數的積分在經過簡單的變量替換之後，就化成了無窮積分。利用積分概念的這兩個推廣之間的這種聯繫，對於 §107 中得到的第一型積分的每一個性質，都可以對應地得到無界函數積分的一個性質。因此，無界函數積分的基本理論的整個輪廓，都可以按照 §107 中敍述的無窮積分的基本理論平行地建立起來。全部命題的證明都不難採用下列兩種方法之一做出來：或者我們完全平行於 §107 中的論證(在絕大多數情形下，它們是平行於無窮級數理論來做出的)來重新做出這些證明，或者利用我們上面所說的積分變量的替換，把我們要證明的命題化成無窮積分中的相應定理，然後再引用無窮積分中的這個

相應定理。

與 § 107 中的定理相應的下列這些定理成立(這裏,在所有的情形下,我們都爲了確定起見假定對於無論怎樣小的 $\varepsilon>0$ 被積函數都在區間 $(a+\varepsilon, b)$ 上有界,可積,但是,一般說來,在整個區間 (a, b) 上無界)。

定理 1′. 積分(4)收斂的必要充分條件是:無論 $\varepsilon>0$ 怎樣小,對於一切充分小的 $\delta_1>0, \delta_2>0$, 我們都有不等式

$$\left|\int_{a+\delta_1}^{a+\delta_2} f(x)\,dx\right|<\varepsilon.$$

定理 2′ (比較原則)。如果當 $a\leqslant x\leqslant b$ 時,我們有 $0\leqslant f(x)\leqslant c\varphi(x)$, 其中 c 是一個正常數,則從積分

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx$$

收斂,就可以推出積分

$$\int_a^b f(x)\,dx \tag{4}$$

收斂,並且有不等式

$$\int_a^b f(x)\,dx\leqslant c\int_a^b \varphi(x)\,dx.$$

如果積分

$$\int_a^b |f(x)|\,dx \tag{6}$$

收斂,我們就說積分(4)絕對收斂。根據定理 1′,由積分(6)的收斂性,不難推出積分(4)的收斂性。

因爲不難直接證明，積分

$$\int_a^b (x-a)^{-\alpha}\,dx$$

當 $\alpha<1$ 時收斂，當 $\alpha\geqslant 1$ 時發散，所以由定理 2′，不難推出下列簡單的收斂判別法。

定理 3′. 如果 $\alpha<1$，又對於全部充分接近 a 的 $x>a$，有不等式 $|f(x)|\leqslant (x-a)^{-\alpha}$，則積分(4)絕對收斂；反之，如果 $\alpha\geqslant 1$，又對於全部充分接近 a 的 $x>a$，我們有 $f(x)\geqslant (x-a)^{-\alpha}$，則積分(4)發散。

我們已經知道，§107 中定理 4 所說明的更加精確的判別法可以判斷積分的非絕對(條件)收斂性，無界函數積分的相應判別法是下述定理。

定理 4′. 如果 $\alpha>0$，當 $x>a$ 時函數 $\varphi(x)$ 連續，並且有這樣一個正常數 C 存在，使得對於任意小的 $\varepsilon>0$，都有

$$\left|\int_{a+\varepsilon}^{b} \varphi(x)\,dx\right|<C,$$

則積分

$$\int_a^b (x-a)^{\alpha}\varphi(x)\,dx$$

收斂。

證明. 令

$$\int_u^b \varphi(x)\,dx=\Phi(u)\qquad (a<u\leqslant b),$$

於是 $|\Phi(u)|<C\ (a<u\leqslant b)$。利用分部積分法，我們得到:

$$\int_{a+\varepsilon}^{b}(x-a)^{\alpha}\varphi(x)\,dx=$$

$$=\left[-(x-a)^{\alpha}\Phi(x)\right]\Big|_{a+\varepsilon}^{b}+\alpha\int_{a+\varepsilon}^{b}(x-a)^{\alpha-1}\Phi(x)\,dx=$$

$$=\varepsilon^{\alpha}\Phi(a+\varepsilon)+\alpha\int_{a+\varepsilon}^{b}(x-a)^{\alpha-1}\Phi(x)\,dx$$

(因爲 $\Phi(b)=0$)。當 $\varepsilon\to0$ 時，右端第一項趨向於零，因爲 $\alpha>0$，$|\Phi(a+\varepsilon)|<C$。至於第二項，因爲被積函數的絕對值小於 $\frac{C}{(x-a)^{1-\alpha}}$，其中 $1-\alpha<1$。因此，根據定理 3′，當 $\varepsilon\to0$ 時它以收斂積分

$$\alpha\int_{a}^{b}(x-a)^{\alpha-1}\Phi(x)\,dx$$

爲極限。所以當 $\varepsilon\to0$ 時，等式左端也有(同樣的)極限，這就證明了定理 4′。

例 1. 討論積分

$$I=\int_{0}^{1}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx.$$

對於任意一個常數 $\lambda>0$，當 $x\to0$ 時，由洛必大法則立刻可以知道乘積 $x^{\lambda}\ln x$ 趨向於零，這只要把這個乘積表成 $\frac{\ln x}{x^{-\lambda}}$ 就可以看出來。特別令 $\lambda=\frac{1}{4}$ 因而對於充分小的 $x>0$，我們有

$$|\ln x|<x^{-\frac{1}{4}},$$

所以，

$$\frac{|\ln x|}{\sqrt{x}}<x^{-\frac{3}{4}},$$

由此可見，根據定理 3′ 積分 I 絕對收斂。

例 2. 討論積分

$$I=\int_0^1\left(\cos\frac{1}{x}\right)\frac{dx}{x^{2-\alpha}},$$

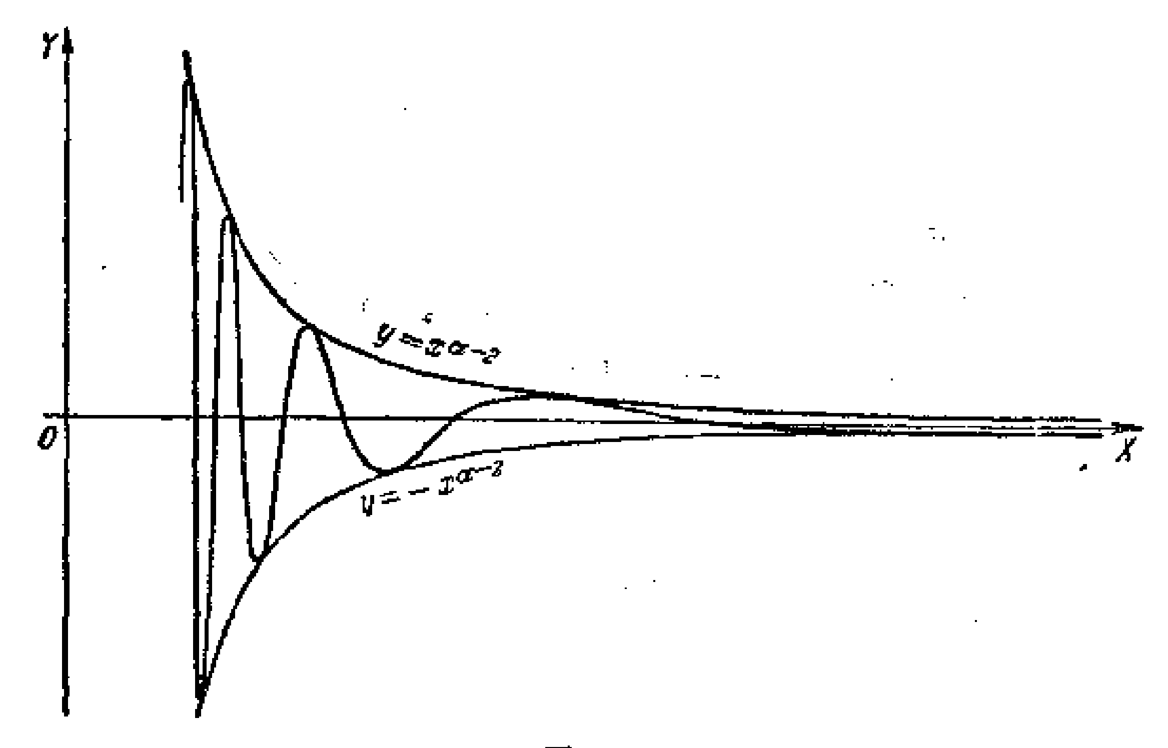


圖 68

其中 α 是任意一個正常數。對於很小的 α，當 $x\to 0$ 時，量 $\frac{1}{x^{2-\alpha}}$ 增大得很快；但因為這時 $\cos\frac{1}{x}$ 無窮多次地在 $+1$ 與 -1 之間振動，所以被積函數在點 $x=0$ 的鄰域內無界；這個函數的圖形就是圖 68 。

變量替換 $x=\frac{1}{y}$ 給出：

$$\left|\int_\varepsilon^1\cos\frac{1}{x}\frac{dx}{x^2}\right|=\left|\int_1^{\frac{1}{\varepsilon}}\cos y\,dy\right|=\left|\sin\frac{1}{\varepsilon}-\sin 1\right|<2.$$

因此，函數

$$\varphi(x)=\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}$$

在區間 $(0, 1)$ 上滿足定理 4′ 的要求。應用這個定理($a=0$)，我們得到：積分

$$\int_0^1 x^{\alpha}\varphi(x)\,dx=\int_0^1 \cos\frac{1}{x}\,\frac{dx}{x^{2-\alpha}}=I$$

對於任意 $\alpha>0$ 都收斂。

進一步的練習可以參看 Б. П. 捷米多維奇的習題集，第四章，習題102，104，110。

第二十六章　看作參變量的函數的積分

§ 109. 有限積分

對於客觀世界的各種量間的數量關係的研究，使我們有必要揭露越來越多的新的函數關係。因此，數學分析的基本任務之一，就是要我們能够考慮越來範圍越廣的函數族。然而如果我們僅僅只有一個產生這個或那個函數族的原則指示時，那當然是不够的；在我們確定這種新的函數族的同時，對我們來說，一個重要的事情，是我們還要能够有研究這些新函數的工具，因爲如果沒有這種工具，我們的收穫就必然地會只是一些無用的東西；因爲一個函數，如果我們不會研究它，要揭露它的性質我們也沒有什麼辦法的話，這種函數對我們當然是沒有用的。因此，科學總是力求把新的還不曾研究過的函數關係與建立用來研究這種新函數關係的工具結合起來，這種工具就會使得我們有可能來系統地研究這些新函數，從而逐步地揭露出它們的重要性質來。

以前我們使用過的那些辦法，已經提供了很多例子從各方面說明了這個見解的豐富內容，例如無窮的函數級數的和，儘管它的每一項都是我們熟知的函數（例如冪級數與三角級數），但一般說來，還是一個新的，我們很少知道它的性質的函數。而另一方面，也就是這個作爲函數定義的級數本身，常常就是一個有力而且方便的研究這種函數的重要特徵的工具（例如函數值的計算以及確定對函數進行運算的結果）。我們已經知道，無窮級數這個工具具有很多多麼有用的性質，以及級數的性質與它所表達的函數的性質之間有着多麼密切的關係。一個更加值得注意的例子是積分這個工具。我們知道，每一個連續函數都有一族的原函數，而這些原函數，甚至於就是對於最簡單的（初等）函數來說，也多半是全新的，除去它可微以及它的導數就是我們的已知函數之外

就什麼也不知道的函數。當然，求原函數的問題的確給予了我們一個產生新函數的豐富的來源；然而，不幸的是，這樣確定出來的新函數本身幾乎是一點用也沒有的，因爲，比如說，關於"積分對數"，我們所知道的就只是它的導數等於 $\frac{1}{\ln x}$，單從這一點，我們是不可能知道這個函數(對我們來說需要知道)的許多特徵的；特別是，這一點點知識就沒有告訴我們有什麼方法能够計算積分對數的值。那末，我們怎麼樣來擺脫這個困難呢？我們已經建立過一個絕妙的工具(積分)，這個工具使得我們可以按照一個給定的函數去求出它的原函數：像我們常說的，我們已經給了原函數一個構造性的定義，換句話說，利用這個工具來描述的原函數的定義是極便於用來研究這個函數的性質的(特別說來，它就使得我們可以計算原函數的值到任意精確的程度)；就歷史上來說，只有在這個積分工具建立之後，求原函數才眞正成爲產生一類新的函數關係的豐富的源泉。

這一章的主要任務，是要介紹一個新的確定與研究函數的方法——就歷史上來說，這個方法已經表明它是最富有成果的方法之一，它使得我們可以定出，並且細緻地研究一系列無論在理論上還是在許多各種各樣的應用上都有頭等重要意義的新的函數關係。

假定 $f(x, u)$是一個二元函數，在區域(矩形) $\mathscr{R}$ $(a \leqslant x \leqslant b, \alpha \leqslant u \leqslant \beta)$上連續。在區間$(\alpha, \beta)$上任意選定變量 u 的一個值。於是 $f(x, u)$ 成爲變量 x 在區間(a, b)上的一個一元連續函數；一般說來，積分

$$\int_a^b f(x, u)\,dx$$

顯然依賴於我們所選擇的變量 u 的值，對於每一個這樣選定的 u 值，積分都有一個確定的值，並且，一般說來，當 u 的值改變時，積分的值也跟着改變；因此，這個積分是一個在區間(α, β)上確定的 u 的函數；我們把它記作$\varphi(u)$，因此，

$$\varphi(u)=\int_a^b f(x,u)\,dx \qquad (\alpha\leqslant u\leqslant\beta). \tag{1}$$

被積函數所依賴的變量 u，在積分過程中（保持某一個固定的值）是一個常量，通常我們把它叫做一個參變量；積分的值依賴於這個參變量所取的值。當然，也有可能被積函數依賴於許多參變量 $u_1, u_2, \cdots, u_n$；於是積分

$$\varphi(u_1, u_2, \cdots, u_n)=\int_a^b f(x, u_1, u_2, \cdots, u_n)\,dx \tag{2}$$

就是所有這些參變量的函數。

例. 在 §66 中我們已經知道

$$\int e^{ux}\cos vx\,dx=\frac{e^{ux}(v\sin vx+u\cos vx)}{u^2+v^2}+C;$$

於是我們不難求出

$$\int_0^1 e^{ux}\cos vx\,dx=\frac{e^u(v\sin v+u\cos v)-u}{u^2+v^2};$$

這個等式左端的積分就是兩個參變量 u 與 v 的函數；等式右端則給出這個函數的初等表達式。

在這個例子中，依賴於參變量 u 與 v 的積分是這些參變量的一個初等函數。然而在絕大多數的情形下，(2) 型的積分，即使在 $f(x, u_1, u_2, \cdots, u_n)$ 對於所有的變量都是初等函數的情形下，也都是非初等的函數，因而除了積分(2)本身外，我們就再也沒有任何其他可以用來研究它的解析工具了。在這種情形，我們就只能從(2)式出發來研究函數 φ 的性質；特別是，要求出這個函數的近似值除了這個積分以外，我們也再沒有別的任何工具。因此很自然，這種類型的積分的性質，以及對於它進行解析運算的法則，都需要我們來仔細地進行研究，本章中所從事的就是這件事情。

爲了簡單起見，我們只討論 (1) 型這種只依賴於一個參變量的積分，我們的推理與結論可以毫無困難地運用到 (2) 型積分的一般情形上去。

定理 1. 如果函數 $f(x, u)$ 在矩形 $\mathscr{R}$ $(a \leqslant x \leqslant b, \alpha \leqslant u \leqslant \beta)$ 上連續，則由積分 (1) 確定的函數 $\varphi(u)$ 在區間 (α, β) 上也連續。

證明. 只要點 u 與 $u+\Delta u$ 都屬於區間 (α, β)，就有：

$$\varphi(u+\Delta u)-\varphi(u)=\int_a^b [f(x, u+\Delta u)-f(x, u)]\, dx,$$

從而

$$|\varphi(u+\Delta u)-\varphi(u)| \leqslant \int_a^b |f(x, u+\Delta u)-f(x, u)|\, dx. \tag{3}$$

因爲根據 § 88 的定理 3，函數 $f(x, u)$ 在矩形 $\mathscr{R}$ 上一致連續；因此，對於無論怎樣小的 $\varepsilon>0$，都有這樣一個 $\delta>0$ 存在，使得對於這個矩形的任意兩點 (x_1, u_1)，(x_2, u_2)，只要它們的距離小於 δ，就有：

$$|f(x_2, u_2)-f(x_1, u_1)|<\varepsilon.$$

因爲點 (x, u) 與 $(x, u+\Delta u)$ 的距離等於 $|\Delta u|$，所以當 $|\Delta u|<\delta$ 時，我們有：

$$|f(x, u+\Delta u)-f(x, u)|<\varepsilon,$$

其中 (x, u) 與 $(x, u+\Delta u)$ 是矩形 $\mathscr{R}$ 上的任意兩點。因此，根據(3)式，當 $|\Delta u|<\delta$ 時，

$$|\varphi(u+\Delta u)-\varphi(u)|<\varepsilon(b-a) \quad (\alpha \leqslant u, u+\Delta u \leqslant \beta).$$

因爲 $\varepsilon>0$ 可以任意小，所以定理 1 就證明了。

這樣，得到了積分(1)關於參變量 u 的連續性之後，我們就有可能來求函數 $\varphi(u)$ 在區間 (α, β) 上(或者它的任何一部分上)的積分。積分

$$\int_\alpha^\beta \varphi(u)\, du=\int_\alpha^\beta \left\{\int_a^b f(x, u)\, dx\right\} du \tag{4}$$

(在假定函數 $f(x,u)$ 在區域 $\mathscr{R}$ 上連續的條件下)總是有意義的。我們已經知道，函數級數是否可以"逐項"積分，換句話說，是否可以在求和的符號下求積分，是一個具有重大意義的事情；同樣，對(1)型的函數來說，是否可以把對於 u 的積分放到對於 x 求積分的符號下去，也是一個極端重要的問題。因此，我們現在的問題是，積分(4)是否根本就等於積分

$$\int_a^b \left\{ \int_\alpha^\beta f(x,u)\,du \right\} dx,$$

而只是進行積分的次序不一樣。這跟在區間 (a,b) 上的函數級數

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$$

是否可以逐項積分的問題就是等式

$$\int_a^b \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) \right\} dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b u_k(x)\,dx$$

是否成立，也就是改變對於 k 求和與對 x 求積分的運算次序問題完全一樣。因此，在關於 x 的積分符號下對 u 求函數 $\varphi(u)$ 的積分的可能性，就相當於函數 $f(x,u)$ 相繼對 x 與對 u 進行積分的結果與積分次序無關。我們現在要來證明，對於連續函數來說，這個問題的答案永遠是肯定的。

定理 2. 如果函數 $f(x,u)$ 在矩形 $\mathscr{R}$ 上連續，則

$$\int_\alpha^\beta \varphi(u)\,du = \int_\alpha^\beta \left\{ \int_a^b f(x,u)\,dx \right\} du = \int_a^b \left\{ \int_\alpha^\beta f(x,u)\,du \right\} dx.$$

證明. 假定 $a \leqslant a' < b' \leqslant b$, $\alpha \leqslant \alpha' < \beta' \leqslant \beta$ 又 m 與 M 分別表示函數 $f(x,u)$ 在矩形 $(a' \leqslant x \leqslant b', \alpha' \leqslant u \leqslant \beta')$ 上的下確界與上確界。於是當 $\alpha' \leqslant u \leqslant \beta'$ 時，我們有

$$m(b'-a')\leqslant\int_{a'}^{b'}f(x,u)\,dx\leqslant M(b'-a'),$$

因此對 u 從 α' 到 β' 進行積分，就得到

$$m(b'-a')(\beta'-\alpha')\leqslant\int_{\alpha'}^{\beta'}\left\{\int_{a'}^{b'}f(x,u)\,dx\right\}du\leqslant$$
$$\leqslant M(b'-a')(\beta'-\alpha'). \tag{5}$$

利用同樣的方法，也可以證明

$$m(b'-a')(\beta'-\alpha')\leqslant\int_{a'}^{b'}\left\{\int_{\alpha'}^{\beta'}f(x,u)\,du\right\}dx\leqslant M(b'-a')(\beta'-\alpha'). \tag{6}$$

現在用分點

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b,$$

把區間(a,b)分成 n 部分，又用分點

$$\alpha=u_0<u_1<u_2<\cdots<u_m=\beta$$

把區間(α,β)分成m部分。把矩形 $x_{i-1}\leqslant x\leqslant x_i$, $u_{k-1}\leqslant u\leqslant u_k$ 的面積記作 $\Delta_{ik}=(x_i-x_{i-1})(u_k-u_{k-1})$，又函數 $f(x,u)$ 在這個矩形上的下確界與上確界分別記作 m_{ik} 與 M_{ik}。把不等式(5)與(6)應用到這些矩形，就得出

$$m_{ik}\Delta_{ik}\leqslant\int_{u_{k-1}}^{u_k}\left\{\int_{x_{i-1}}^{x_i}f(x,u)\,dx\right\}du\leqslant M_{ik}\Delta_{ik}, \tag{7}$$

$$m_{ik}\Delta_{ik}\leqslant\int_{x_{i-1}}^{x_i}\left\{\int_{u_{k-1}}^{u_k}f(x,u)\,du\right\}dx\leqslant M_{ik}\Delta_{ik} \tag{8}$$

$$(1\leqslant i\leqslant n,\ 1\leqslant k\leqslant m).$$

由於

$$I=\int_{\alpha}^{\beta}\left\{\int_{a}^{b}f(x,u)\,dx\right\}du=\sum_{k=1}^{m}\int_{u_{k-1}}^{u_k}\left\{\sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i}f(x,u)\,dx\right\}du=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}\int_{u_{k-1}}^{u_k}\left\{\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x, u)\,dx\right\}du,$$

類似地

$$I'=\int_a^b\left\{\int_\alpha^\beta f(x, u)\,du\right\}dx=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}\int_{x_{i-1}}^{x_i}\left\{\int_{u_{k-1}}^{u_k} f(x, u)\,du\right\}dx.$$

對這些等式的二重和中的每一項都應用不等式(7)與(8)，我們就得到:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} m_{ik}\Delta_{ik}\leqslant I\leqslant\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} M_{ik}\Delta_{ik},$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} m_{ik}\Delta_{ik}\leqslant I'\leqslant\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} M_{ik}\Delta_{ik}.$$

因此，我們要想證明它們相等的積分 I 與 I'，都界於同樣的兩個界限之間；從而它們的差 $I-I'$ 的絕對值更不可能超過這兩個界限的距離，換句話說，

$$|I-I'|\leqslant\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}(M_{ik}-m_{ik})\Delta_{ik}.$$

如果我們把區間(a, b)與(α, β)分得充分小（不要與任意小混爲一談），則根據函數 $f(x, u)$在矩形 $\mathscr{R}$ 上的一致連續性，所有的差 $M_{ik}-m_{ik}(1\leqslant i\leqslant n, 1\leqslant k\leqslant m)$ 就都可以小於預先給定的任意正數 ε。因此

$$|I-I'|\leqslant\varepsilon\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}\Delta_{ik}=\varepsilon(b-a)(\beta-\alpha).$$

因爲這裏的 ε 可以任意小，而左端與 ε 無關，所以 $I=I'$，從而定理 2 也就證明了。

現在我們來考慮(由積分(1)確定的)函數 $\varphi(u)$的微分問題。跟無窮級數逐項微分的問題一樣，這裏是函數 $\varphi(u)$在區間(α, β) 上的可微

性，以及是否可以把它的導數表作積分

$$\int_a^b \frac{\partial f(x, u)}{\partial u}\, dx$$

的問題，或者說，是否可以"在積分號下進行微分"的問題。跟級數的各項的可微性是一個必要條件一樣，我們這裏也應該事先假定在矩形 $\mathscr{R}$ 上偏導數 $\frac{\partial f}{\partial x}$ 存在並且連續(或者至少對於 x 是可積的)。另一方面，這個假定也就够了，下面的定理就說明這一點。

定理 3. 如果函數 $f(x, u)$ 以及它的偏導數 $\frac{\partial f(x, u)}{\partial u}$ 都在矩形 $\mathscr{R}$ 上連續，則積分(1)確定的函數 $\varphi(u)$ 在區間 (α, β) 上是可微的，並且

$$\varphi'(u)=\int_a^b \frac{\partial f(x, u)}{\partial u}\, dx \qquad (\alpha \leqslant u \leqslant \beta). \tag{9}$$

證明. 令

$$\int_a^b \frac{\partial f(x, u)}{\partial u}\, dx = g(u) \qquad (\alpha \leqslant u \leqslant \beta).$$

根據定理 2, 當 $\alpha \leqslant v \leqslant \beta$ 時

$$\int_c^v g(u)\, du = \int_a^b \left\{ \int_c^v \frac{\partial f(x, u)}{\partial u}\, du \right\} dx =$$

$$= \int_a^b \{ f(x, v) - f(x, \alpha) \}\, dx = \varphi(v) - \varphi(\alpha).$$

這個等式的左端是一個連續函數的積分，對於它的上限 v 應該是可微的，並且它的導數就等於 $g(v)$ (定理 1 § 50)。因此，對於任意的 v $(\alpha \leqslant v \leqslant \beta)$，$\varphi'(v)$ 都存在並且等於 $g(v)$。這就證明了定理 3。

以上所講的，我們總是假定積分(1)的積分限 a 與 b 都是常數。但

是在實際應用中，常常會碰到對於參變量 u 的不同的值，積分限也就不同的情形，因而這時 a 與 b 就都是參變量 u 的函數：$a=a(u)$, $b=b(u)$。當然，這樣的積分

$$\psi(u)=\int_{a(u)}^{b(u)} f(x,u)\,dx \tag{10}$$

跟積分(1)一樣，也是參變量 u 的一個函數。

現在我們來考慮這種更爲廣泛的依賴於參變量的積分的某些性質。在這裏，我們總是假定在矩形 $\mathscr{R}$ 上函數 $f(x,u)$ 連續，又函數 $a(u)$ 與 $b(u)$ 在區間 (α,β) 上也都連續，並且

$$a\leqslant a(u)\leqslant b,\qquad a\leqslant b(u)\leqslant b\qquad (\alpha\leqslant u\leqslant\beta).$$

首先，不難證明，函數 $\psi(u)$ 在區間 (α,β) 上連續。事實上，如果 u 與 $u+\Delta u$ 都屬於這個區間，則

$$\psi(u+\Delta u)-\psi(u)=\int_{a(u+\Delta u)}^{b(u+\Delta u)} f(x,u+\Delta u)\,dx-\int_{a(u)}^{b(u)} f(x,u)\,dx.$$

因爲

$$\int_{a(u+\Delta u)}^{b(u+\Delta u)} f(x,u+\Delta u)\,dx=$$

$$=\int_{a(u+\Delta u)}^{a(u)} f(x,u+\Delta u)\,dx+\int_{a(u)}^{b(u)} f(x,u+\Delta u)\,dx+\int_{b(u)}^{b(u+\Delta u)} f(x,u+\Delta u)dx,$$

所以

$$\psi(u+\Delta u)-\psi(u)=\int_{a(u+\Delta u)}^{a(u)} f(x,u+\Delta u)\,dx+$$

$$+\int_{b(u)}^{b(u+\Delta u)} f(x,u+\Delta u)\,dx+\int_{a(u)}^{b(u)}[f(x,u+\Delta u)-f(x,u)]\,dx. \tag{11}$$

當 $\Delta u \to 0$ 時，右端最後的積分的積分限保持不變，根據在證明定理 1 時同樣的理由，它趨向於零。至於前兩個積分，顯然它們的絕對值分別小於

$$M|a(u+\Delta u)-a(u)|, \qquad M|b(u+\Delta u)-b(u)|$$

(其中 M 是函數 $|f(x,y)|$ 在矩形 $\mathscr{R}$ 上的上確界)，從而根據函數 $a(u)$ 與 $b(u)$ 連續的假定，當 $\Delta u \to 0$ 時，它們也都趨向於零。因此，

$$\psi(u+\Delta u)-\psi(u) \to 0 \qquad (\Delta u \to 0) \qquad (\alpha \leqslant u \leqslant \beta),$$

所以函數 $\psi(u)$ 在區間 (α, β) 上連續；從而就有定理 1 的下列推廣。

定理 4. 如果函數 $f(x,u)$ 在矩形 $\mathscr{R}$ 上連續，又函數 $a(u)$ 與 $b(u)$ 都在區間 (α, β) 上連續，並且

$$a \leqslant a(u) \leqslant b, \qquad a \leqslant b(u) \leqslant b \qquad (\alpha \leqslant u \leqslant \beta),$$

則由積分 (10) 確定的函數 $\psi(u)$ 在區間 (α, β) 上也連續。

現在假定函數 $a(u)$ 與 $b(u)$ 在區間 (α, β) 上不僅連續，而且還是可微的，又函數 $f(x,u)$ 在矩形 $\mathscr{R}$ 上有連續的偏導數 $\frac{\partial f}{\partial u}$；我們要來證明，在這些條件下，函數 $\psi(u)$ 在區間 (α, β) 上是可微的，並且 $\psi'(u)$ 的表達式是公式 (9) 的直接推廣。

我們有：

$$\psi(u+\Delta u)-\psi(u) = \int_{a(u+\Delta u)}^{b(u+\Delta u)} f(x, u+\Delta u)\,dx - \int_{a(u)}^{b(u)} f(x,u)\,dx =$$

$$= \left\{ \int_{a(u)}^{b(u)} f(x, u+\Delta u)\,dx - \int_{a(u)}^{b(u)} f(x,u)\,dx \right\} +$$

$$+ \int_{b(u)}^{b(u+\Delta u)} f(x, u+\Delta u)\,dx - \int_{a(u)}^{a(u+\Delta u)} f(x, u+\Delta u)\,dx. \qquad (12)$$

我們把 u 看作一個常數，並且令

$$\varphi(v) = \int_{a(u)}^{b(u)} f(x,v)\,dx \qquad (\alpha \leqslant v \leqslant \beta).$$

根據定理 3, 函數$\varphi(v)$在區間(α, β)上可微，並且

$$\varphi'(v)=\int_{a(u)}^{b(u)}\frac{\partial f(x, v)}{\partial v}\,dx \qquad (\alpha\leqslant v\leqslant\beta);$$

特別地，當 $v=u$ 時

$$\int_{a(u)}^{b(u)}\frac{\partial f(x, u)}{\partial u}\,dx=\varphi'(u)=\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\varphi(u+\Delta u)-\varphi(u)}{\Delta u}=$$

$$=\lim_{\Delta u\to 0}\frac{1}{\Delta u}\left\{\int_{a(u)}^{b(u)}f(x, u+\Delta u)dx-\int_{a(u)}^{b(u)}f(x, u)\,dx\right\}. \qquad (13)$$

這就說明，等式(12)右端的第一項，被 Δu 除了之後，當 $\Delta u\to 0$ 時，有極限

$$\int_{a(u)}^{b(u)}\frac{\partial f(x, u)}{\partial u}\,dx.$$

現在來看第二項。根據中值定理，

$$\int_{b(u)}^{b(u+\Delta u)}f(x, u+\Delta u)\,dx=f(\xi, u+\Delta u)[b(u+\Delta u)-b(u)],$$

其中 ξ 在 $b(u)$與$b(u+\Delta u)$之間。因此

$$\frac{1}{\Delta u}\int_{b(u)}^{b(u+\Delta u)}f(x, u+\Delta u)\,dx=f(\xi, u+\Delta u)\frac{b(u+\Delta u)-b(u)}{\Delta u}.$$

當 $\Delta u\to 0$ 時，上式右端第二個因子趨向於 $b'(u)$。而在第一個因子中，$u+\Delta u\to u$, $\xi\to b(u)$, 所以根據函數 $f(x, u)$的連續性，

$$f(\xi, u+\Delta u)\to f[b(u), u].$$

因此，

$$\lim_{\Delta u\to 0}\frac{1}{\Delta u}\int_{b(u)}^{b(u+\Delta u)}f(x, u+\Delta u)\,dx=f[b(u), u]b'(u). \qquad (14)$$

完全類似地，我們有：

$$\lim_{\Delta u\to 0}\frac{1}{\Delta u}\int_{a(u)}^{a(u+\Delta u)} f(x, u+\Delta u)\,dx=f[a(u), u]a'(u). \tag{15}$$

最後，綜合結果(13)，(14)，(15)，我們從等式(12)得到：

$$\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\psi(u+\Delta u)-\psi(u)}{\Delta u}=$$

$$=\int_{a(u)}^{b(u)}\frac{\partial f(x, u)}{\partial u}dx+f[b(u), u]b'(u)-f[a(u), u]a'(u).$$

這樣，我們就證明了函數 $\psi(u)$在點 u 的可微性，並且得到了導數 $\psi'(u)$的表達式。這個結果可以敍述成下列命題。

定理 5. 如果函數 $f(x, u)$在矩形 $\mathscr{R}$ 上連續，並且對於 u 有連續的偏導數，又函數 $a(u)$ 與 $b(u)$ 都在區間(α, β)上可微，並且

$$a\leqslant a(u)\leqslant b,\qquad a\leqslant b(u)\leqslant b\qquad (\alpha\leqslant u\leqslant\beta),$$

則由積分(10)確定的函數 $\psi(u)$在區間(α, β)上可微，並且

$$\psi'(u)=\int_{a(u)}^{b(u)}\frac{\partial f(x, u)}{\partial u}\,dx+f[b(u), u]b'(u)-f[a(u), u]a'(u). \tag{16}$$

特別情形，當 $a(u)$與 $b(u)$ 在區間 (α, β) 上都是常數時，我們有 $a'(u)=b'(u)=0$, 於是公式(16)就變成了定理 3 中的公式(9)。

§ 109 的練習，讀者可以參看 Б. П. 捷米多維奇的習題集，第七章，習題 17, 18, 23.

§ 110. 無窮積分

在前節中，我們考慮含參變量的有限積分時，我們曾經不止一次地指出，這一範圍內的問題與推理，跟無窮級數理論中相應的問題十分類似。然而只有當我們來研究含參變量的無窮積分，換句話說，研究

$$\int_a^\infty f(x, u)\,dx \tag{1}$$

型的積分時，這個類似之點才完全顯露出來（像第二十五章中一樣，為了確定起見，我們只考慮具有無窮上限的積分；當然，由於對稱性，這種積分的一切性質都可以搬到具有無窮下限的積分，然後再搬到上下限都是無窮的積分上去）。我們以後就要看到，這種積分的理論是導出分析上很多重要的經典公式的基礎，本節中我們就來研究這種理論。

我們假定積分(1)對於參變量 u 在某個區間 $\alpha\leqslant u\leqslant\beta$ 上的一切値都是收斂的。於是，它的値就是關於參變量 u 確定在區間(α, β)上的一個函數：

$$\int_a^\infty f(x, u)\,dx=\varphi(u). \tag{2}$$

正如我們已經知道的，在函數級數的理論中（第十九章）一致收斂性的概念起着重要的作用一樣，對(1)型的積分來說，類似的概念也具有根本重要的意義。如果在區間(α, β)上的任何一點 u 積分(1)都收斂，那就是說，對於任意的 $\varepsilon>0$ 與區間(α, β)上的任意一點 u，都可以找到這樣一個數 A_0（依賴於 ε 與 u），使得對於任意一個 $A\geqslant A_0$，都有：

$$\left|\int_A^\infty f(x, u)\,dx\right|<\varepsilon. \tag{3}$$

一般說來，對於一個給定的 ε，A_0 這個數隨着不同的 u 而不同。如果對於任意的 $\varepsilon>0$，都有這樣一個 A_0 存在，使得只要 $A\geqslant A_0$，不等式(3)對於任意的 u $(\alpha\leqslant u\leqslant\beta)$都成立。則我們就說，積分(1)在區間$(\alpha,\beta)$上一致收斂。

例．考慮積分

$$I(\alpha)=\int_0^\infty e^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x}dx,$$

其中 $\alpha \geqslant 0$。在 §66 的末尾，我們已經知道

$$\int e^{ax}\sin bx\,dx=\frac{e^{ax}(a\sin bx-b\cos bx)}{a^2+b^2}+C,$$

其中 a 與 b 是任意兩個常數。特別地，

$$\int e^{-\alpha x}\sin x\,dx=\frac{-e^{-\alpha x}(\alpha\sin x+\cos x)}{1+\alpha^2}+C=\Phi_\alpha(x)+C,$$

其中函數 $\Phi_\alpha(x)$ 當 $x\geqslant 0$ 與 $\alpha\geqslant 0$ 時顯然是有界的：

$$|\Phi_\alpha(x)|<B\qquad(x\geqslant 0,\ \alpha\geqslant 0),$$

這裏 B 是一個常數。因此利用分部積分法❶，我們就得到：當 $a>0$ 時，

$$\left|\int_a^\infty e^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x}dx\right|=\left|\left[\frac{\Phi_\alpha(x)}{x}\right]_a^\infty+\int_a^\infty\frac{\Phi_\alpha(x)}{x^2}dx\right|\leqslant$$

$$\leqslant\left|\frac{\Phi_\alpha(a)}{a}\right|+\int_a^\infty\frac{|\Phi_\alpha(x)|}{x^2}dx<\frac{2B}{a}.$$

因為上式右端不依賴於 α，並且當 $a\to\infty$ 時趨向於零，所以積分 $I(\alpha)$ 關於參變量 α 在半直線 $\alpha\geqslant 0$ 上一致收斂。

一致收斂性的概念，對於我們所考慮的這類積分所起的重大作用，跟它對於函數級數所起的作用是完全一樣的。以下我們要證明的整個一系列的命題，每一個都在第十九章中有完全類似的定理。

首先，我們有類似於 §73 中定理 2 的一個簡單而且方便的收斂判別法：

一致收斂判別法。 如果有這樣一個連續函數 $F(x)$ 存在，使得對於一切充分大的 x 以及區間 (α,β) 上的一切 u 都有 $|f(x,u)|\leqslant F(x)$，又如果積分

❶ 分部積分公式應用到無窮積分時，要它的兩端的積分都收斂（這時當自變量無限增大時，非積分的那一項要趨向於一個確定的極限）。我們應該首先寫出對於有限積分區間 (a,b) 的公式，然後再讓 b 無限增大來直接驗證。

$$\int_a^\infty F(x)\,dx$$

收斂，則積分(2)在區間(α,β)上一致收斂。

定理的證明可以跟 § 73 定理 2 的證明完全類似地來進行，這裏對於充分大的A與$B>A$，有不等式

$$\left|\int_A^B f(x,u)\,dx\right|\leqslant\int_A^B|f(x,u)|\,dx\leqslant\int_A^B F(x)\,dx$$

成立。

跟連續函數級數的一致收斂性保證了級數和的連續性一樣（§ 74 定理 1），積分(2)的一致收斂性（在函數$f(x,u)$連續的條件下）同樣引導到它自己所代表的（參數量u的）函數的連續性：

定理 1. 如果函數$f(x,u)$當$a\leqslant x$, $\alpha\leqslant u\leqslant\beta$時連續，又積分(2)在區間$(\alpha,\beta)$上一致收斂，則函數$\varphi(u)$在$(\alpha,\beta)$上連續。

這個定理的證明與 § 74 定理 1 的證明是完全類似的。假定$\varepsilon>0$是任意小的一個數；我們選好某一個相當大的A_0，使得$A_0>a$，並且

$$\left|\int_{A_0}^\infty f(x,u)\,dx\right|<\frac{\varepsilon}{3}\ (\alpha\leqslant u\leqslant\beta). \tag{4}$$

因為根據 § 109 的定理 1. 積分

$$\int_a^{A_0} f(x,u)\,dx$$

是區間(α,β)上的u的連續函數，所以對於充分小的$|\Delta u|$

$$\left|\int_a^{A_0} f(x,u+\Delta u)\,dx-\int_a^{A_0} f(x,u)\,dx\right|<\frac{\varepsilon}{3}. \tag{5}$$

但是

$$\varphi(u+\Delta u)-\varphi(u)=\left\{\int_a^{A_0} f(x,u+\Delta u)\,dx-\int_a^{A_0} f(x,u)\,dx\right\}+$$

$$+\int_{A_0}^{\infty} f(x,u+\Delta u)\,dx-\int_{A_0}^{\infty} f(x,u)\,dx,$$

因此根據(4)與(5)，只要 $|\Delta u|$ 充分小，就有：

$$|\varphi(u+\Delta u)-\varphi(u)|\leqslant\left|\int_a^{A_0} f(x,u+\Delta u)\,dx-\int_a^{A_0} f(x,u)\,dx\right|+$$

$$+\left|\int_{A_0}^{\infty} f(x,u+\Delta u)\,dx\right|+\left|\int_{A_0}^{\infty} f(x,u)\,dx\right|<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon.$$

這樣就證明了定理 1。

因此，積分(2)的一致收斂性是函數 $\varphi(u)$ 連續的一個充分條件，跟級數的情形一樣，它也不是必要條件。不過，也有這樣一個重要的特別情形存在，在這個特別情形下它就是必要的了；下列命題跟 § 74 的定理 2 完全類似。

定理 2. 如果 $f(x,u)$ 連續，並且在區域 $x\geqslant a$, $\alpha\leqslant u\leqslant\beta$ 上不變號，則函數 $\varphi(u)$ 的連續性可以推出積分(2)的一致收斂性。

證明. 爲了確定起見，我們假定 $f(x,u)\geqslant 0$ $(x\geqslant a,\ \alpha\leqslant u\leqslant\beta)$。假定 u_0 是區間 (α,β) 上的任意一點。因爲積分(2)在點 u_0 收斂，所以對於任意的 $\varepsilon>0$，都有這樣一個數 A_0 存在，使得

$$\int_{A_0}^{\infty} f(x,u_0)\,dx<\varepsilon; \tag{6}$$

在這裏，數 A_0 依賴於我們所選擇的點 u_0；但是因爲函數 $\varphi(u)$ 按照假定連續，又函數 $\int_a^{A_0} f(x,u)\,dx$ 根據 § 109 定理 1 在區間 (α,β) 上也連

續，所以函數

$$\int_{A_0}^{\infty} f(x, u)\, dx = \varphi(u) - \int_{a}^{A_0} f(x, u)\, dx$$

在區間(α, β)上也連續；因而不等式(6)既然在點u_0成立，也就一定在這點的某個鄰域內成立。因此，對於每一個點u_0都有某一個區間包含它，在這個區間上的一切點不等式(6)都成立。對於區間(α, β)上所有的點u_0建立起來的這種區間的全體，蓋住了區間(α, β)。根據有限覆蓋定理，在這一組區間中一定有有限個區間$\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_n$存在，它們就已經蓋住了區間$(\alpha, \beta)$。對於每一個這種區間$\delta_i (1 \leqslant i \leqslant n)$都對應這樣一個數$A_i$，使得對於區間$\delta_i$上的一切點$u$，都有：

$$\int_{A_i}^{\infty} f(x, u)\, dx < \varepsilon.$$

假定數A是這些數$A_1, A_2, \cdots, A_n$中最大的一個；於是根據條件$f(x, u) \geqslant 0$ $(x \geqslant a, \alpha \leqslant u \leqslant \beta)$，我們就有：

$$\int_{A}^{\infty} f(x, u)\, dx < \varepsilon$$

對於每一個區間δ_i上一切點u都成立，又因爲區間(α, β)被區間$\delta_1, \delta_2, \cdots \delta_n$完全蓋住，從而這個不等式對於區間$(\alpha, \beta)$上的一切點$u$都成立。由於$\varepsilon > 0$可以任意小，這就說明，積分

$$\int_{a}^{\infty} f(x, u)\, dx$$

在區間(α, β)上一致收斂。這就證明了定理2。

還有跟一致收斂的函數級數可以逐項積分相類似的下列定理。

定理 3. 在定理1的同樣條件下，

$$\int_{\alpha}^{\beta} \varphi(u)\, du = \int_{a}^{\infty} \left\{ \int_{\alpha}^{\beta} f(x, u)\, du \right\} dx.$$

換句話說，就是在所說的條件下，對於 x 與 u 進行積分的次序可以交換：

$$\int_{\alpha}^{\beta} \left\{ \int_{a}^{\infty} f(x, u)\, dx \right\} du = \int_{a}^{\infty} \left\{ \int_{\alpha}^{\beta} f(x, u)\, du \right\} dx,$$

也就是說，在一致收斂的條件下，§ 109 的定理 2 可以推廣到 $b = +\infty$ 的情形。

證明．假定數 $A_0 > a$ 是這樣大，使得當 $A \geqslant A_0$ 時，

$$\left| \int_{A}^{\infty} f(x, u)\, dx \right| < \varepsilon \qquad (\alpha \leqslant u \leqslant \beta). \tag{7}$$

我們有：

$$\int_{\alpha}^{\beta} \varphi(u)\, du = \int_{\alpha}^{\beta} \left\{ \int_{a}^{A} f(x, u)\, dx \right\} du + \int_{\alpha}^{\beta} \left\{ \int_{A}^{\infty} f(x, u)\, dx \right\} du.$$

但是根據 § 109 定理 2，

$$\int_{\alpha}^{\beta} \left\{ \int_{a}^{A} f(x, u)\, dx \right\} du = \int_{a}^{A} \left\{ \int_{\alpha}^{\beta} f(x, u)\, du \right\} dx,$$

再根據(7)式的估計，前面一個等式就給出：

$$\left| \int_{\alpha}^{\beta} \varphi(u)\, du - \int_{a}^{A} \left\{ \int_{\alpha}^{\beta} f(x, u)\, du \right\} dx \right| < \varepsilon(\beta - \alpha).$$

這時只需要唯一的一個條件 $A \geqslant A_0$；但是這正好就說明了積分

$$\int_{a}^{\infty} \left\{ \int_{\alpha}^{\beta} f(x, u)\, du \right\} dx$$

收斂並且等於 $\int_a^\beta \varphi(u)\,du$。因而定理 3 就證明了。

在這裏，可以互換次序的兩個積分，只有一個是無窮積分，另一個的積分區間是有限的。然而在應用中，更有意義的是那種更爲困難，兩個積分都是無窮積分的情形。這類問題的一個典型例子是這樣：在什麼條件下

$$\int_a^\infty \left\{ \int_\alpha^\infty f(x,u)\,du \right\} dx = \int_\alpha^\infty \left\{ \int_a^\infty f(x,u) dx \right\} du. \tag{8}$$

在這裏，我們不可能把這個問題討論得很詳盡。我們只考慮一個今後需要的特別情形，在這個特別情形的條件下，我們可以容易地建立起一些應用起來很方便的判別(8)是否成立的判別法。這個特別情形是，我們假定函數 $f(x,u)$ 在整個區域 $x\geqslant a,\ u\geqslant\alpha$ 上保持同一符號；爲了確定起見，我們假定它是非負的。於是我們有

定理 4. 如果 $f(x,u)\geqslant 0$ 並且在區域 $x\geqslant a, u\geqslant\alpha$ 上連續，又如果函數❶

$$\varphi(u)=\int_a^\infty f\,dx, \qquad \psi(x)=\int_\alpha^\infty f\,du \tag{9}$$

依次當 $u\geqslant\alpha$ 與 $x\geqslant a$ 時連續，並且積分

$$\int_a^\infty \psi(x)\,dx, \qquad \int_\alpha^\infty \varphi(u)\,du$$

中有一個收斂，則另一個一定收斂，並且它們彼此相等，換句話說(8)式成立。

證明. 我們首先指出，從我們所假定的函數 $\varphi(u)$ 與 $\psi(x)$ 連續，

❶ 這裏以及今後，爲了簡便起見，我們用 f 來代替 $f(x,u)$。

根據定理 2，就可以推出兩個積分(9)都一致收斂——第一個在任何有限區間 $a\leqslant u\leqslant\beta$ 上，第二個在任何有限區間 $a\leqslant x\leqslant b$ 上。爲了確定起見，我們假定積分

$$\int_a^\infty \psi(x)\,dx=I$$

收斂；於是要證明的是，積分

$$\int_a^\beta \varphi(u)\,du$$

當 $\beta\to\infty$ 時趨向於 I，或者，因爲根據定理 3

$$\int_a^\beta \varphi(u)\,du=\int_a^\beta\left\{\int_a^\infty f\,dx\right\}du=\int_a^\infty\left\{\int_a^\beta f\,du\right\}dx,$$

就是要證明

$$\lim_{\beta\to\infty}\int_a^\infty\left\{\int_a^\beta f\,du\right\}dx=I. \tag{10}$$

假設 ε 是任意一個函數。由假設，知道積分

$$\int_a^\infty \psi(x)\,dx$$

收斂，所以一定有這樣一個 $b>a$ 存在，使得

$$\int_b^\infty \psi(x)\,dx=\int_b^\infty\left\{\int_a^\infty f\,du\right\}dx<\varepsilon,$$

由此根據 $f(x,u)\geqslant 0$，就不消說對於任意的 $\beta>a$，都有：

$$\int_b^\infty\left\{\int_\beta^\infty f\,du\right\}dx<\varepsilon. \tag{11}$$

現在把數 β 選得這樣大，使得有：

$$\int_{\beta}^{\infty} f\,du < \frac{\varepsilon}{b-a} \qquad (a \leqslant x \leqslant b)$$

（根據積分(9)中第二個在區間 $a \leqslant x \leqslant b$ 上的一致收斂性，這總是可以辦到的）。於是

$$\int_{a}^{b} \left\{ \int_{\beta}^{\infty} f\,du \right\} dx < \varepsilon. \tag{12}$$

把不等式(11)與(12)相加，就給出：

$$\int_{a}^{\infty} \left\{ \int_{\beta}^{\infty} f\,du \right\} dx < 2\varepsilon,$$

或者，也就是

$$I - \int_{a}^{\infty} \left\{ \int_{\alpha}^{\beta} f\,du \right\} dx < 2\varepsilon,$$

只要 β 充分地大。由於 ε 的任意性，這就證明了(10)式成立，也就是說，證明了定理 4。

最後，我們來考慮由積分(2)確定的函數 $\varphi(u)$，在積分號下進行微分的可能性問題，換句話說，在什麼樣的條件下，函數 $\varphi(u)$ 可微，並且

$$\varphi'(u) = \int_{a}^{\infty} \frac{\partial f(x, u)}{\partial u}\, dx \qquad (\alpha \leqslant u \leqslant \beta). \tag{13}$$

這裏，也有一個跟函數級數的逐項微分定理(§ 75 定理 3)完全類似的定理：

定理 5. 如果在區域 $x \geqslant a$, $\alpha \leqslant u \leqslant \beta$ 上函數 $f(x, u)$ 連續並且有連續的偏導數 $\frac{\partial f(x, u)}{\partial u}$，又如果積分

$$\int_{a}^{\infty} \frac{\partial f(x, u)}{\partial u} dx \tag{14}$$

在區間(α, β)上一致收斂，則由積分(2)確定的函數$\varphi(u)$ 在這個區間上可微，並且有(13)式的那個關係。

證明．對於任意的自然数$n>a$，令

$$\varphi_n(u) = \int_{a}^{n} f(x, u) dx$$

當$n\to\infty$時，我們有：

$$\varphi_n(u)\to\varphi(u) \qquad (\alpha\leqslant u\leqslant\beta).$$

根據 § 109 的定理 3，函數$\varphi_n(u)$在區間(α, β)上是可微的，並且

$$\varphi_n'(u) = \int_{a}^{n} \frac{\partial f(x, u)}{\partial u} dx;$$

因此，積分(14)在區間(α, β)上的一致收斂性說明，在這個區間上一致地

$$\varphi_n'(u)\to\int_{a}^{\infty} \frac{\partial f(x, u)}{\partial u} dx \qquad (n\to\infty).$$

根據 § 75 的定理 3，我們就得出結論：在區間(α, β)上$\varphi'(u)$存在並且就等於積分(14)，而這就是我們要證明的。

附註．我們以上所討論的含參變量的廣義積分，只是積分限無窮的情形。其實，我們在這個情形建立的全部結果，對於第二種類型的廣義積分——無界函數的積分，都同樣地有效，並且可以用同樣的方法來加以證明。這裏我們不去證明，甚至不去寫出這些相應的定理了；事實上，這樣做在這裏也未必有必要，因爲這個類似之處是這樣完全，差不多只要把這一個情形下的任何推理自然而然地搬到另一個情形去就行了。對於讀者來說，把本節中的全部概念、公式以及全部定理的證明細

節，都類推到無界函數積分的情形，倒是一個非常有益的練習。

§ 111. 例

在 § 109 與 § 110 中，我們所講的含參變量的積分的理論，在分析中有許許多多各種不同的應用。在以下這兩節中我們要來考慮這些應用中最重要的一些例子。我們常常遇到這樣一種積分，它本身並不含任何參變量，但是爲了求出它的值來，比較簡便的方法反而是：把它與某一個含參變量的積分聯系起來，然後再從這個含參變量的積分的性質來求出原來積分的值。本節中我們就來考慮幾個這種類型的例子。

例 1. 求積分

$$I=\int_0^\infty \frac{1-e^{-t}}{t}\cos t\,dt$$

的值。

我們考慮更一般的積分

$$I(\lambda)=\int_0^\infty \frac{1-e^{-\lambda t}}{t}\cos t\,dt,$$

其中 λ 是任意的一個非負數，於是

$$I=I(1);$$

我們先證明積分 $I(\lambda)$ 在區間 $0\leqslant\lambda\leqslant1$ 上關於 λ 一致收斂。首先，在任何有限區間 $(0, a)$ 上，例如在 $(0, 1)$ 上，積分都無疑義地一致收斂，因爲從不等式 $0\leqslant1-e^{-\lambda t}\leqslant\lambda t$ 不難知道，被積函數當 $t\to0$ 時在 $0\leqslant\lambda\leqslant1$ 上關於 λ 一致有界。

因此，餘下來只要證明，積分

$$\int_1^\infty \frac{1-e^{-\lambda t}}{t}\cos t\,dt$$

在區間 $0\leqslant\lambda\leqslant1$ 上關於 λ 一致收斂。但這可以直接從下面兩點推出：1）積分

$$\int_1^\infty \frac{\cos t}{t}\,dt$$

收斂（§ 107）並且不依賴於 λ，2）積分

$$\int_1^\infty e^{-\lambda t}\frac{\cos t}{t}\,dt$$

在半軸 $\lambda\geqslant0$ 上一致收斂；這後一點的證明跟我們在 § 110 中所考慮的積分

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t}\frac{\sin t}{t}\,dt \qquad (\lambda\geqslant0)$$

的一致收斂性的證明完全一樣。

因此，積分 $I(\lambda)$ 在區間 $0\leqslant\lambda\leqslant1$ 上一致收斂，因而，它在該區間上是 λ 的一個連續函數。特別說來，當 $\lambda\to0$ 時

$$I(\lambda)\to I(0)=0,$$

這一點我們以後要用到。

把積分 $I(\lambda)$ 中的被積函數記作 $f(t,\lambda)$。因為

$$\frac{\partial f(t,\lambda)}{\partial\lambda}=e^{-\lambda t}\cos t,$$

所以對於任意的 $\lambda>0$ 積分

$$\int_0^\infty \frac{\partial f(t,\lambda)}{\partial\lambda}\,dt$$

都在區間 $\left(\frac{\lambda}{2},2\lambda\right)$ 上一致收斂，因此，當 $\lambda>0$ 時 $I'(\lambda)$ 存在，並且根據 § 110 的定理 5，

$$I'(\lambda)=\int_0^\infty e^{-\lambda t}\cos t\,dt. \qquad (\lambda>0)$$

但是，如我們所知道的（§ 66），函數

$$\frac{e^{-\lambda t}(\sin t-\lambda\cos t)}{1+\lambda^2}$$

是 $e^{-\lambda t}\cos t$ 的原函數，並且當 $t\to\infty$ 時它趨向於零。因此，對於任意的 $\lambda>0$，都有

$$I'(\lambda)=\frac{e^{-\lambda t}(\sin t-\lambda\cos t)}{1+\lambda^2}\Bigg|_0^\infty=\frac{\lambda}{1+\lambda^2},$$

因而，由於 $I(0)=0$，

$$I(\lambda)=I(\lambda)-I(0)=\int_0^\lambda I'(x)\,dx=\int_0^\lambda\frac{x}{1+x^2}dx=\frac{1}{2}\ln(1+\lambda^2),$$

由此可見

$$I=I(1)=\frac{1}{2}\ln 2.$$

例 2. 在 § 107 中我們已經證明了積分

$$I=\int_0^\infty\frac{\sin x}{x}\,dx$$

收斂；現在我們要來求出它的值。

我們在 § 110 所考慮過的積分

$$I(\alpha)=\int_0^\infty e^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x}\,dx\qquad(\alpha\geqslant 0)$$

當 $\alpha=0$ 時就等於 I；在 § 110 我們已經知道，積分 $I(\alpha)$ 在整個半直線 $\alpha\geqslant 0$ 上一致收斂；因此，根據 § 110 的定理 1，函數 $I(\alpha)$ 在 $\alpha\geqslant 0$ 連續；特別說來，

$$I=I(0)=\lim_{\alpha\to+0}I(\alpha).$$

另一方面，在積分號下對 α 微分 $I(\alpha)$，就得到：

$$-\int_0^\infty e^{-\alpha x}\sin x\,dx;$$

不難看出，根據 §110 的判別法，對於不論怎樣小的 $\varepsilon>0$，這個積分在 $\alpha\geqslant\varepsilon$ 都一致收斂（因爲 $|e^{-\alpha x}\sin x|\leqslant e^{-\varepsilon x}$）。因此根據 §110 的定理 5，當 $\alpha>0$ 時 $I'(\alpha)$ 存在，並且

$$I'(\alpha)=-\int_0^\infty e^{-\alpha x}\sin x\,dx=-\frac{1}{1+\alpha^2}$$

（這個等式可以直接證明，因爲原函數 $\Phi_0(x)$ 是已知的（參看 §110））因此，如果考慮到當 $\alpha\to\infty$ 時[1] $I(\alpha)\to 0$，積分以後就得到：

$$-I(\alpha)=-\int_\alpha^\infty\frac{du}{1+u^2}=-\frac{\pi}{2}+\operatorname{arc\,tg}\alpha,$$

因而，當 $\alpha\to 0$ 時得到極限

$$I(0)=I=\frac{\pi}{2};$$

因此，

$$\int_0^\infty\frac{\sin x}{x}\,dx=\frac{\pi}{2},$$

這樣，就解決了我們的問題。

此外，由於當 $\alpha>0$ 時，分部積分給出：

$$\int_0^\alpha\frac{\sin x}{x}\,dx=\frac{1-\cos x}{x}\Big|_0^\alpha+\int_0^\alpha\frac{1-\cos x}{x^2}\,dx,$$

又因爲

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=0,$$

所以當 $\alpha\to\infty$ 時我們還得到極限

[1] 因爲 $\left|\frac{\sin x}{x}\right|\leqslant 1$，所以 $|I(\alpha)|\leqslant\int_0^\infty e^{-\alpha x}\,dx=\frac{1}{\alpha}$。

$$\int_0^\infty \frac{1-\cos x}{x^2}dx=\frac{\pi}{2}.$$

这个公式也是积分学中非常重要的公式之一；这个积分与前一个积分不同之点，显然是在于它是絕对收斂的。

我們还要申明一下，当 $\alpha>0$ 时，替換 $z=\frac{x}{\alpha}$ 給出：

$$\int_0^\infty \frac{\sin \alpha z}{z}dz=\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2};$$

当 $\alpha<0$ 时，替換 $z=-\frac{x}{\alpha}$ 則給出：

$$\int_0^\infty \frac{\sin \alpha z}{z}dz=-\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx=-\frac{\pi}{2};$$

因此，积分

$$I(\alpha)=\int_0^\infty \frac{\sin \alpha z}{z}dz$$

对于 α 的任何值都收斂，但它是 α 的一个不連續函数：

$$I(\alpha)=\begin{cases}+\frac{\pi}{2} & (\alpha>0),\\ -\frac{\pi}{2} & (\alpha<0),\\ 0 & (\alpha=0).\end{cases}$$

例 3. 現在我們来求积分

$$I=\int_0^\infty e^{-x^2}dx$$

的值，这个积分在积分学的許多应用中(特別說来，在概率論和数理統計方面)占很重要的地位。变量替換 $x=ut$ (其中 $u>0$ 是一个常数) 給出：

$$I=\int_0^\infty ue^{-u^2t^2}dt. \qquad (u>0)$$

于是当 $u>0$, $\varepsilon>0$,

$$f(u,t)=ue^{-u^2(1+t^2)},$$

$$\varphi(u)=\int_0^\infty f(u,t)dt=e^{-u^2}\int_0^\infty ue^{-u^2t^2}dt=Ie^{-u^2}, \tag{1}$$

$$\psi_\varepsilon(t)=\int_\varepsilon^\infty f(u,t)du=-\frac{1}{2(1+t^2)}e^{-u^2(1+t^2)}\Big|_\varepsilon^\infty=\frac{e^{-\varepsilon^2(1+t^2)}}{2(1+t^2)}, \tag{2}$$

函数 $\varphi(u)$ 在区間 (ε,∞) 連續，而函数 $\psi_\varepsilon(t)$ 則在区間 $(0,\infty)$ 連續。显然积分

$$\int_\varepsilon^\infty \varphi(u)du=I\int_\varepsilon^\infty e^{-u^2}du$$

收斂。因此根据 § 110 定理 4 可得

$$\int_\varepsilon^\infty \varphi(u)du=\int_0^\infty \psi_\varepsilon(t)dt. \tag{3}$$

在上式中讓 $\varepsilon\to 0$。根据(1)，上式左端等于

$$I\int_\varepsilon^\infty e^{-u^2}du,$$

故当 $\varepsilon\to 0$ 时趋向于 I^2。要求上式右端的極限，我們注意到当 $\varepsilon\geqslant 0$, $t\geqslant 0$ 时，由(2)可得

$$\psi_\varepsilon(t)\leqslant\frac{1}{2(1+t^2)};$$

因而积分

$$\int_0^\infty \frac{dt}{2(1+t^2)}$$

收斂，則根据 § 110 的判別法，等式(3)的右端的积分当 $\varepsilon\geqslant 0$ 时一致收斂，因而对于 $\varepsilon\geqslant 0$，它是 ε 的連續函数；特別当 $\varepsilon\to 0$ 时它的極限值应等于当 $\varepsilon=0$ 时的函数值，即

$$\int_0^\infty \frac{dt}{2(1+t^2)}=\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} t\Big|_0^\infty=\frac{\pi}{4}.$$

因此我們得到

$$I^2=\frac{\pi}{4}, \quad I=\frac{1}{2}\sqrt{\pi},$$

这就解决了我們的問題。

因此，剩下的問題只消来証明，在公式(1)左端变换积分次序的确是可以的。这不难根据 § 110 的定理 4 来做到，因为在这里該定理中所有的条件都能够滿足。事实上，令

$$ue^{-u^2(1+t^2)}=f(u,t),$$

于是在积分区域上我們总有 $f(u,t)\geqslant 0$。积分

$$\int_0^\infty\left\{\int_0^\infty f(u,t)\,du\right\}dt$$

的收斂性已經直接証明了。最后，

$$\int_0^\infty f(u,t)dt=e^{-u^2}\int_0^\infty ue^{-u^2t^2}dt=Ie^{-u^2}$$

到处都是 u 的連續函数，又

$$\int_0^\infty f(u,t)du=\frac{1}{2(1+t^2)}$$

也到处都是 t 的連續函数。

§ 112. 尤拉積分

积分（第一型的积分）

$$\mathrm{B}(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx$$

与（第二型的积分）

$$\Gamma(s)=\int_0^\infty x^{s-1}e^{-x}\,dx$$

都称为尤拉积分❶。前者是兩个參变量 p 与 q 的函数，而后者是參变量 s 的函数。这兩个积分都确定出重要的非初等函数，在各种不同的应用中，这兩个函数起着相当大的作用。因此，它們的性質数学家曾經大量地并且詳細地进行了研究；特别是，曾經为它們造成了專門的函数表。在本节中我們只考虑这兩个函数的某些最簡單的性質。

1. 当然，这兩个积分都只在那些使它們收斂的參变量的値上才能

❶ $\mathrm{B}(p,q)$ 与 $\Gamma(s)$ 分别讀作"貝踏 p,q"与"加馬 s"。

確定函數值。因此，我們首先應該搞清楚的，就是這兩個積分的收斂區域（換句話說，所有那些使它們收斂的參變量的值的集合）究竟是什麼樣的區域。在積分 $B(p, q)$ 中，當 $p \geqslant 1, q \geqslant 1$ 時被積函數在整個積分區間上連續，從而積分的存在，這是不成問題的。但是，如果 $p<1$，則被積函數在點 $x=0$ 的附近顯然就變成無界的了；當 $q<1$ 時，在點 $x=1$ 的附近也是這樣。在 $p<1$ 的情形，不管什麼樣的 q，當 $x \to 0$ 時，我們都有 $(1-x)^{q-1} \to 1$，也就是說，

$$x^{p-1}(1-x)^{q-1} \sim x^{p-1} \qquad (x \to 0).$$

因此，根據 § 108 的定理 3′ 我們知道，當 $p \leqslant 0 (p-1 \leqslant -1)$ 時積分 $B(p, q)$ 發散；如果 $p>0 (p-1>-1)$，則被積函數在點 $x=0$ 附近的無界性並不破壞積分的收斂性。同樣，當 $q>0$ 時被積函數在點 $x=1$ 附近的無界性也不破壞積分的收斂性，而當 $q \leqslant 0$ 時才使積分發散。因此我們已經得到了下面的結論：**積分 $B(p, q)$ 收斂的必要充分條件是**，$p>0$，$q>0$，以後我們永遠假定這個條件成立。至於積分 $\Gamma(s)$，則首先，我們在 § 107 中已經知道，對於任何 s 無窮積分限的存在都不會影響到積分的收斂性。只是當 $s<1$ 時在點 $x=0$ 的附近被積函數要變成無界的；但因爲當 $x \to 0$ 時

$$x^{s-1} e^{-x} \sim x^{s-1}.$$

所以，跟前面一樣，我們知道，**積分** $\Gamma(s)$ **收斂的必要充分條件是** $s>0$。

2. 現在我們來證明，函數 $B(p, q)$ 在積分的收斂區域的任何點上（即對於任意的 $p>0, q>0$）都連續。這可以從下述事實推出：對於任意的正數 p_0 與 q_0，積分 $B(p, q)$ 在區域 $p \geqslant p_0, q \geqslant q_0$ 上都一致收斂。事實上，當 $p \geqslant p_0$，$q \geqslant q_0$ 時，不管 x 是區間 $(0, 1)$ 上的那一點，我們都有：

$$x^{p-1}(1-x)^{q-1} \leqslant x^{p_0-1}(1-x)^{q_0-1}$$

因而，對於任意的 $\varepsilon>0$

$$\int_0^\varepsilon x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx \leqslant \int_0^\varepsilon x^{p_0-1}(1-x)^{q_0-1}\,dx \quad (p \geqslant p_0,\ q \geqslant q_0,)$$

類似的不等式對於積分區間$(1-\varepsilon, 1)$也成立，這就證明了積分 $\mathrm{B}(p, q)$ 在區域 $p \geqslant p_0, q \geqslant q_0$ 上的一致收斂性（參看§110的一致收斂判別法和最後的附註）。

完全類似地，我們可以證明積分$\Gamma(s)$在區域$s_0 \leqslant s \leqslant S_0$上一致收斂，其中$s_0$與$S_0$ $(s_0 < S_0)$是任意兩個正數（這個積分的一致收斂區域跟$\mathrm{B}(p, q)$的一致收斂區域的不同之點是它有上界，因爲，不難證明，無窮限的存在使得積分在區域 $s \geqslant S_0$ 上不一致收斂）。由此可見，函數$\Gamma(s)$在任何$s>0$都連續。

3. 當$s>0$時分部積分法給出：

$$\Gamma(s+1) = \int_0^\infty x^s e^{-x}\,dx = -x^s e^{-x}\Big|_0^\infty + s\int_0^\infty x^{s-1}e^{-x}\,dx = s\Gamma(s),$$

因爲$x^s e^{-x}$當$x=0$時等於零，又當$x\to\infty$時趨向於零。因此，

$$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s) \qquad (s>0). \tag{1}$$

重覆地應用這個關係式，我們就得到：

$$\Gamma(s+1) = s(s-1)\cdots(s-n+1)\Gamma(s-n+1), \tag{2}$$

其中n是任意的自然數，又$s>n-1$。特別說來，當$s=n$時

$$\Gamma(n+1) = n(n-1)\cdots 2\cdot 1\cdot \Gamma(1).$$

但是

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x}\,dx = 1,$$

所以對於任意的整數$n \geqslant 1$，我們都有：

$$\Gamma(n+1) = n!$$

這個著名公式的重要性，主要是由於它給出$n!$的分析表達式：

$$n! = \int_0^\infty x^n e^{-x}\, dx \qquad (n = 1, 2, \cdots). \tag{3}$$

如果我們按照通常的做法，令 $0! = 1$，則這個公式在 $n = 0$ 的情形下也還是對的。但是等式(3)右端的積分究竟不同於表達式 $n!$，這個不同之點就在於，它不僅對於整數 n，而且對於任何大於 -1 的數 n 都有意義；因此很自然地，對於大於 -1 的任何非整數 n 我們可以利用公式(3)來定義表達式 $n!$；這就作爲 n 的一個連續函數給出了 $n!$ 的分析表達式，並且當 n 爲非負的整數時它就取通常的值。

如果 $s>0$ 不是整數，則我們可以找到這樣一個整數 $n \geqslant 0$，使得 $n<s<n+1$；根據公式(2)我們就有：

$$\Gamma(s) = (s-1)(s-2)\cdots(s-n)\Gamma(s-n);$$

因爲 $0<s-n<1$，所以這個公式就把在區間$(n, n+1)$上研究 $\Gamma(s)$的問題化成了在區間$(0, 1)$上來研究它的問題；因爲 $n \geqslant 0$ 是任意的一個整數，於是我們已經看到了，只要知道了函數 $\Gamma(s)$在區間 $0 \leqslant s \leqslant 1$ 上的性質，我們就可以用簡單初等的方法來估計它的值，並且探求它在整個區域 $s>0$ 上的性質。所有這一切都是函數 $\Gamma(s)$ 所滿足的基本"函數方程"(1)的推論。

4. 對於函數 $B(p, q)$也不難導出類似於公式 (1) 的降低變量的公式。假定 $p>0, q>0$。分部積分法給出：

$$B(p+1, q+1) = \int_0^1 x^p (1-x)^q\, dx =$$

$$= \left[\frac{x^{p+1}}{p+1}(1-x)^q\right]\Bigg|_0^1 + \frac{q}{p+1}\int_0^1 x^{p+1}(1-x)^{q-1}\, dx;$$

因爲

$$x^{p+1} = x^p - x^p(1-x)$$

是恆等式，所以我們得到：

$$B(p+1,q+1)=\frac{q}{p+1}\left\{B(p+1,q)-B(p+1,q+1)\right\},$$

從而

$$B(p+1,q+1)=\frac{q}{p+q+1}B(p+1,q);$$

當然，跟這個公式類似地，降低第一個變量的下列公式也成立：

$$B(p+1,q+1)=\frac{p}{p+q+1}B(p,q+1).$$

把這個公式應用到前一個公式的右端，我們就得出一個對稱的公式：

$$B(p+1,q+1)=\frac{pq}{(p+q)(p+q+1)}B(p,q)\qquad(p>0,q>0).\qquad(3')$$

5. 現在我們來建立聯繫着 $B(p,q)$ 與 $\Gamma(s)$ 的著名公式，在積分 $B(p,q)$ 內實行下列積分變量替換：

$$x=\frac{1}{1+z},$$

於是

$$1-x=\frac{z}{1+z},\qquad dx=-\frac{dz}{(1+z)^2},\qquad z=\frac{1-x}{x},$$

我們不難算出：

$$B(p,q)=\int_0^\infty\frac{z^{q-1}}{(1+z)^{p+q}}dz.\qquad(4)$$

另一方面，變量替換 $x=\frac{z}{\alpha}$（其中 $\alpha>0$ 是一個常量）給出：當 $s>0$ 時

$$\int_0^\infty x^{s-1}e^{-\alpha x}dx=\frac{1}{\alpha^s}\int_0^\infty z^{s-1}e^{-z}dz=\frac{\Gamma(s)}{\alpha^s};\qquad(5)$$

因此當 $z>0, p>0, q>0$ 時

$$\int_0^\infty u^{p+q-1}e^{-u(1+z)}\,du=\frac{\Gamma(p+q)}{(1+z)^{p+q}}. \tag{6}$$

公式(4)與(6)就給出：

$$\Gamma(p+q)\mathrm{B}(p,q)=\int_0^\infty \Gamma(p+q)\frac{z^{q-1}}{(1+z)^{p+q}}dz=$$

$$=\int_0^\infty\left\{z^{q-1}\int_0^\infty u^{p+q-1}e^{-u(1+z)}\,du\right\}dz=$$

$$=\int_0^\infty\left\{\int_0^\infty z^{q-1}u^{p+q-1}e^{-u(1+z)}\,du\right\}dz. \tag{7}$$

我們先假定 $p>1, q>1$；於是不難證明，公式右端的積分可以交換次序；為此目的，我們只要證明，在這裏 § 110 的定理 4 中所有的條件都已經滿足就行了。事實上，如果把被積函數記作 $f(z,u)$，我們首先看到，它在積分區域上連續並且是非負的。其次，函數

$$\int_0^\infty f(z,u)\,du=z^{q-1}\int_0^\infty u^{p+q-1}e^{-u(1+z)}\,du=\Gamma(p+q)\frac{z^{q-1}}{(1+z)^{p+q}}$$

(參看(6))當 $0\leqslant z<+\infty$ 時連續，而函數

$$\int_0^\infty f(z,u)\,dz=e^{-u}u^{p+q-1}\int_0^\infty z^{q-1}e^{-uz}\,dz=e^{-u}u^{p+q-1}\frac{\Gamma(q)}{u^q}=$$

$$=\Gamma(q)u^{p-1}e^{-u} \tag{8}$$

(這裏在進行積分時我們應用了公式(5))當 $0\leqslant u<+\infty$ 時也連續。因此，根據 § 110 的定理 4，從公式(7)右端的積分的存在性立刻推出積分

$$\int_0^\infty\left\{\int_0^\infty f(z,u)\,dz\right\}du$$

存在，並且它們兩個彼此相等，因此，根據公式(8)

$$\Gamma(p+q)\,\mathrm{B}(p,q)=\int_0^\infty\left\{\int_0^\infty f(z,u)\,dz\right\}du=$$

$$=\int_0^\infty \Gamma(q)u^{p-1}e^{-u}\,du=\Gamma(p)\Gamma(q).$$

這樣一來，對於任意的 $p>1, q>1$ 我們就都有了

$$\mathrm{B}(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}. \tag{9}$$

現在我們放寬尺度，假定 p 與 q 是任意的兩個正數。於是，根據我們剛才證明的結果，我們有(因為 $p+1>1, q+1>1$):

$$\mathrm{B}(p+1,q+1)=\frac{\Gamma(p+1)\Gamma(q+1)}{\Gamma(p+q+2)}.$$

如果在這裏我們把函數B與Γ所有的值都用公式(1)與(3′)表達出來，則經過化簡以後我們就得到公式(9)，因此，我們就在 $p>0, q>0$ 的條件下也證明了公式(9)的成立。

這個重要的關係式首先使得我們能够把研究函數 $\mathrm{B}(p,q)$ 的問題化成研究函數 $\Gamma(s)$ 的問題，反之，在某些情形下，我們也能够從函數 $\mathrm{B}(p,q)$ 的性質來揭露 $\Gamma(s)$ 的性質。

特別說來，如果 p 與 q 是自然數，則從公式(9)立刻知道

$$\mathrm{B}(p,q)=\frac{(p-1)!(q-1)!}{(p+q-1)!}.$$

例 1. 在很多實際應用中，常常需要知道量

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\int_0^\infty x^{-\frac{1}{2}}e^{-x}\,dx$$

的值。作積分變量替換 $x=u^2$，我們得到:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=2\int_0^\infty e^{-u^2}du=\sqrt{\pi} \tag{10}$$

(參看 §111 的例 3)。

例 2. 尤拉積分的理論使得我們能够很容易地計算下面這種在實際應用中時常碰到的積分:

$$A_{nm}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\cos^m x\,dx,$$

其中 n 與 m 都是非負的整數。變量替換 $\sin^2 x=u$ 給出:

$$A_{nm}=\frac{1}{2}\int_0^1 u^{\frac{n-1}{2}}(1-u)^{\frac{m-1}{2}}du=\frac{1}{2}\mathrm{B}\left(\frac{n+1}{2},\ \frac{m+1}{2}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+m}{2}+1\right)}.$$

在這個表達式裏函數 Γ 的自變量的值或者是一個整數，或者是一個整數的一半。因此利用關係式(1)與(10)，函數 Γ 的所有這些值都可以計算出來。

§ 113. 斯特林公式

在 § 112 中我們得到了公式

$$n!=\int_0^\infty x^n e^{-x}dx; \tag{1}$$

對於整數 $n\geqslant 0$,這個公式給出量 $n!$ 的一個簡單的分析表達式，而當 n 爲大於 -1 的非整數時，這個公式就是函數 $n!$ 的定義。很大的數的階乘，無論在理論的研究上，或者在實際的計算上，都起着重要的作用；但

是，因爲很大的數的階乘，按照它的定義，是一個很複雜的不便於估計數值的東西，不要說它的精確數值，就連它大小的級我們也不會直接求出來，所以無論對於理論或者實際應用來說，當 n 很大時，來找出一個量 $n!$ 的既簡單而又便於估計的近似表達式，是一件很重要的事情，公式(1)本身並不能作爲這種表達式，因爲對於直接估計數值來說，它還不够明顯。但是，根據表達式(1)，我們可以導出量 $n!$ 的一個滿足全部要求的簡單近似公式。本節的全部內容就是要來做這件事情。導出這個公式的方法也是值得注意的；在這個方法的基礎上來估計積分(1)的數值的步驟，可以用到分析的另外一些問題上去。

爲了淸楚起見，我們把推演的步驟分成幾個階段來敍述。

1. 首先，我們利用變量替換

$$x=n(1+z),\ dx=n\,dz,\ z=\frac{x-n}{n}$$

把積分(1)化成對我們的目的來說更方便的形式：

$$n!=n^{n+1}e^{-n}\int_{-1}^{\infty}\{(1+z)e^{-z}\}^{n}\,dz;$$

在以後的討論中我們永遠令

$$(1+z)e^{-z}=\varphi(z),$$

於是

$$n!=n^{n+1}e^{-n}\int_{-1}^{\infty}\{\varphi(z)\}^{n}\,dz. \tag{2}$$

2. 爲了研究被積函數的性質，我們現在應該對初等函數 $\varphi(z)$ 作詳細的分析。因爲

$$\varphi'(z)=-ze^{-z},$$

所以，當 $z<0$ 時函數 $\varphi(z)$ 遞增，當 $z>0$ 時遞減；在點 $z=0$ 它有一個極大值，等於 1。$\varphi(-1)=0$，又當 $z>0$ 時函數 $\varphi(z)$ 永遠是正的，並且當 $z\to\infty$ 時它單調地趨向於零。函數 $\varphi(z)$ 的圖形大體上就是圖 69 中

那個樣子，

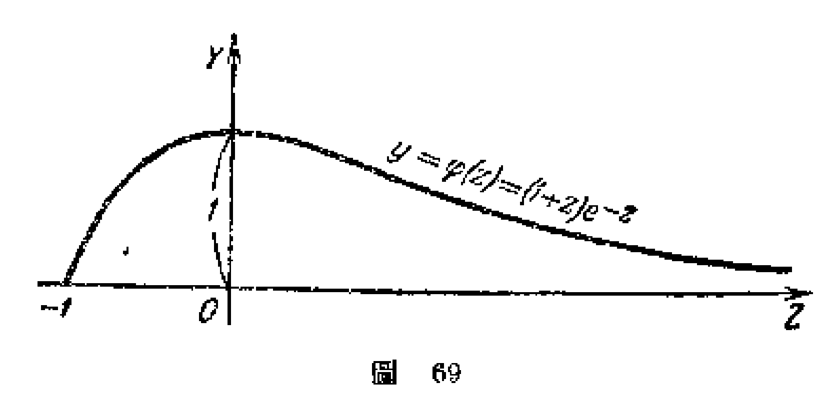


圖 69

其次，我們有：

$$\ln\varphi(z)=\ln(1+z)-z.$$

根據戴勞公式

$$\ln(1+z)=z-\frac{z^2}{2}+\alpha z^3,$$

其中 α 是一個依賴於 z 的量，當 $z\to 0$ 時它趨向於一個確定的極限，因而，它是有界的。由此我們得到：

$$\ln\varphi(z)=-\frac{z^2}{2}+\alpha z^3,$$

從而

$$n\ln\varphi(z)=-\frac{nz^2}{2}+\alpha nz^3,$$

也就是說，

$$\{\varphi(z)\}^n=e^{-\frac{nz^2}{2}}e^{\alpha nz^3}. \tag{3}$$

我們還記得，當 $t\to 0$ 時，無窮小量 e^t-1 與 t 等價，或者說，比值 $\frac{e^t-1}{t}$ 當 $t\to 0$ 時趨向於 1，所以

$$e^t=1+\beta t,$$

其中 β 當 $t\to 0$ 時保持有界。因此，如果 n 與 z 這樣變化，使得 $nz^3\to 0$，則

$$e^{\alpha nz^3}=1+\beta\alpha nz^3=1+\gamma nz^3,$$

其中 γ 當 $nz^3\to 0$ 時是一個有界量；這樣一來，當 $nz^3\to 0$ 時等式(3)就

給出：

$$\{\varphi(z)\}^n = e^{-\frac{nz^2}{2}}\{1+\gamma nz^3\},$$

其中 γ 是一個有界量。這個等式給出了我們所需要的積分(2)中被積函數的估計值。

3. 我們現在來擬定估計積分

$$I(n)=\int_{-1}^{\infty}\{\varphi(z)\}^n\,dz \tag{4}$$

值的計劃。因爲函數 $\varphi(z)$ 當 $z=0$ 時等於 1，而在積分區間其他所有的點上，函數值都在 0 與 1 之間(參看圖 69)，所以當 n 很大時，除去圍繞點 $z=0$ 的一個不大的區間之外，被積函數到處都是很小的，而且當 n 越來越大時，這個區間越來越小。從而使我們很自然地想到，最好從整個積分區間中把圍繞點 $z=0$ 的小區間 $(-\lambda, \lambda)$ 分出來，利用在這一部分裏 z 的值很小這一點，我們以足够的精確性，來確定出在這個區間上積分的值，然後利用比較粗略的估計，證明在整個積分區間的其他兩部分的積分，與我們所求得的在區間 $(-\lambda, \lambda)$ 的積分值比較起來是很微小的。當然，這裏數 λ 依賴於 n 並且當 $n\to\infty$ 時趨向於 0。

我們現在就根據這個計劃開始進行工作。假定 θ 是 $\frac{1}{3}$ 與 $\frac{1}{2}$ 之間的任何一個常數(比方說，$\theta=\frac{2}{5}$ 或者 $\theta=\frac{5}{12}$ 等等)。實際的計算告訴我們，最方便的是取

$$\lambda = n^{-\theta}.$$

在以下的討論中我們永遠這樣取。這樣一來，我們就把整個積分區間 $(-1, +\infty)$ 分成了三個部分：$(-1, -\lambda)$，$(-\lambda, \lambda)$ 以及 $(\lambda, +\infty)$；與此相應地，積分(4)也分成了三項，下面我們就來分別地估計它們的值。

4. 我們從最重要的積分

$$I_1(n)=\int_{-\lambda}^{\lambda}\{\varphi(z)\}^n\,dz$$

的值的兩倍；由於 $\lambda=n^{-\theta}$，最後這個積分的下限等於 $\frac{n^{\frac{1}{2}-\theta}}{\sqrt{2}}$，從而根據 $\theta<\frac{1}{2}$，當 n 無限增大時，這個下限也無限增大，因此，整個這最後一個積分當 $n\to\infty$ 時是一個無窮小量，從而上述等式的右端是一個 $o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ 型的量。因此，關係式(5)就給出：

$$\left|I_1(n)-\frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{n}}\right|<2\int_{\lambda}^{\infty}e^{-\frac{nz^2}{2}}dz+o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)=o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right),$$

或即

$$I_1(n)=\frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{n}}+o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right). \tag{6}$$

這樣一來，對於積分 $I_1(n)$ 來說我們的目的算是達到了：我們已經把它表成了一個很簡單的"主要項"與某一個餘項之和，對於這個餘項，我們所知道的，只是當 $n\to\infty$ 時它是一個比主要項更高級的無窮小量。

5. 現在我們來估計積分

$$I_2(n)=\int_{-1}^{-\lambda}\{\varphi(z)\}^n\,dz.$$

因爲函數 $\varphi(z)$ 在積分區間上遞增，所以

$$I_2(n)<\{\varphi(-\lambda)\}^n(1-\lambda)<\{\varphi(-\lambda)\}^n; \tag{7}$$

但是

$$\varphi(-\lambda)=(1-\lambda)e^{\lambda},$$

$$\ln\varphi(-\lambda)=\lambda+\ln(1-\lambda)=\lambda-\left[\lambda+\frac{\lambda^2}{2}+\frac{\lambda^3}{3}+\cdots\right]<-\frac{\lambda^2}{2},$$

$$n\ln\varphi(-\lambda)<-\frac{n\lambda^2}{2}=-\frac{n^{1-2\theta}}{2},$$

$$\{\varphi(-\lambda)\}^n<e^{-\frac{1}{2}n^{1-2\theta}}=e^{-\frac{1}{2}n^{\tau}},$$

其中 $\tau=1-2\theta>0$. 但是我們知道(參看 § 37 末尾的例 7)，對於無論怎樣小的數 $\tau>0$, 當 $n\to\infty$ 時，上式右端都是一個比 n 的任何負冪$\left(\text{特別說來，}\frac{1}{\sqrt{n}}=n^{-\frac{1}{2}}\right)$都要高級的一個無窮小量。因此不等式(7)給出：

$$I_2(n)=o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right). \tag{8}$$

6. 最後我們轉來估計積分

$$I_3(n)=\int_\lambda^\infty \{\varphi(z)\}^n\,dz.$$

在這裏，最好是再把積分區間分成兩部分：

$$I_3(n)=I_3'(n)+I_3''(n)=\int_\lambda^4 \{\varphi(z)\}^n\,dz+\int_4^\infty \{\varphi(z)\}^n\,dz.$$

在區間$(\lambda, 4)$上，函數 $\varphi(z)$遞減，因而在整個區間上都不大於 $\varphi(\lambda)$, 所以我們有：

$$I_3'(n)=\int_\lambda^4 \{\varphi(z)\}^n\,dz\leqslant\{\varphi(\lambda)\}^n(4-\lambda)<4\{\varphi(\lambda)\}^n. \tag{9}$$

但是根據戴勞公式我們不難知道，當 $n\to\infty$ 時

$$\ln\varphi(\lambda)=-\frac{\lambda^2}{2}+o(\lambda^2),$$

這就表明，當 n 充分大時

$$\ln\varphi(\lambda)<-\frac{\lambda^2}{3},$$

從而

$$\{\varphi(\lambda)\}^n<e^{-\frac{n\lambda^2}{3}}=e^{-\frac{n^{1-2\theta}}{3}}=e^{-\frac{n^\tau}{3}},$$

其中 $\tau=1-2\theta>0$。跟 5 的情形一樣，根據(9)我們就知道，當 $n\to\infty$ 時

$$I_3'(n)=o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right). \tag{10}$$

要估計積分 $I_3''(n)$，我們首先注意，當 $x\geqslant4$ 時，不難算出，$1+x<e^{\frac{x}{2}}$❶，因而 $\varphi(x)<e^{-\frac{x}{2}}$。因此，當 $n\to\infty$ 時

$$I_3''(n)=\int_4^\infty\{\varphi(z)\}^n\,dz<\int_4^\infty e^{-\frac{nx}{2}}dx<\int_0^\infty e^{-\frac{nx}{2}}dx=\frac{2}{n}=o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \tag{11}$$

合併(10)與(11)，就有：

$$I_3(n)=I_3'(n)+I_3''(n)=o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right). \tag{12}$$

7. 關係式(6)，(8)，與(12)給出：

$$I(n)=\int_{-1}^\infty\{\varphi(z)\}^n\,dz=I_1(n)+I_2(n)+I_3(n)=\frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{n}}+o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)=$$

$$=\frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{n}}[1+o(1)].$$

由此根據(2)我們就有：

$$n!=n^{n+1}e^{-n}\frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{n}}[1+o(1)]=n^ne^{-n}\sqrt{2\pi n}[1+o(1)].$$

這樣一來，我們整個的目的就達到了。我們已經把 $n!$ 這個複雜的函數用既簡單又方便的分析公式

$$\Gamma(n+1)=n!=n^ne^{-n}\sqrt{2\pi n}\,[1+o(1)]$$

表達出來了。這個公式是數學分析中最重要的公式之一，它有很多的應用，通常稱它爲**斯特林公式**。關於這個公式的餘項，我們只知道，當 $n\to\infty$ 時它是比主要項高級的一個無窮小量；換句話說，我們的目的只要求計算斯特林公式的主要項，而不要求計較它的餘項。在應用中(特

---

❶ 只需證明，函數 $e^{\frac{x}{2}}-1-x$ 當 $x=4$ 時取正值，並且當 $x\geqslant4$ 遞增就行。

別是在實際的應用中)常常需要這種估計;這種估計常常可以用我們剛才求主要項的表達式的這個辦法來得到,並沒有什麼原則性的困難;不過,本書中我們不能再作更詳細的討論了。

斯特林公式也常常寫成下列等價的對數形式:

$$\ln\Gamma(n+1)=\ln(n!)=n\ln n-n+\frac{1}{2}\ln n+\frac{1}{2}\ln 2\pi+o(1).$$

第二十七章　二重積分與三重積分

§ 114. 可測的平面圖形

1. 引言　在微分學裏面，原來對於一元函數發展起來的一些概念和方法，到後來（第二十二章）被大大地推廣到任意多元的函數；同樣，很自然地，積分學的那些基本概念也可以很有效地搬到多元函數的領域中來。首先，這當然要牽涉到把積分作爲某種確定形式的和的極限這一個中心概念；我們知道，這個概念一開始是從實際問題中產生出來的。在本章中，我們要用最精簡的辦法來討論有關二元函數與三元函數的積分的一些主要問題。全部我們在這方面得到的結果，都可以類推到任意多元函數的情形，大體上不會有什麼原則性的困難。

在一元函數的情形，積分的範圍通常總是一個線段，或者在比較複雜的情形也只是一組線段。當我們轉來討論二元函數時，積分的範圍自然應該變成平面圖形。但是甚至於我們就僅限於考慮那些用簡單閉曲線圍成的非常簡單的圖形，很明顯地，我們也還是不得不遇到大量的各式各樣的這種"積分區域（範圍）"。這種在一元函數的情形根本不可能有的多樣性，使得我們有必要在進入二重積分的研究之前，先要對平面圖形的某些性質，做相當詳細的討論。我們在本節中就專門來進行這種討論。

2. **平面圖形**　在最一般的意義下，我們把任何一個平面點集合 $\mathscr{F}$ 都叫做一個平面圖形。平面上的任何一點 A，如果某一個以它爲中心的圓內的一切點都屬於圖形 $\mathscr{F}$（圖 70），則我們就說點 A 是圖形 $\mathscr{F}$ 的一個內點。如果以點 B 爲中心的某一個圓內沒有一個點屬於圖形 $\mathscr{F}$，則我們說點 B 是這個圖形的一個外點。最後，平面上既不是圖形 $\mathscr{F}$ 的外點又不是 $\mathscr{F}$ 的內點的那種點，稱爲 $\mathscr{F}$ 的邊界點。很明顯，

這種邊界點 C 可以這樣來刻劃：任何一個以 C 點爲中心的圓既含有屬於圖形 $\mathscr{F}$ 的點也含有不屬於它的點。

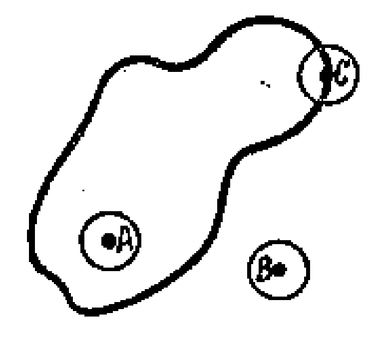


圖 70

從這個定義本身立刻知道，圖形 $\mathscr{F}$ 的內點永遠屬於 $\mathscr{F}$，相反地，它的外點永遠也不會屬於它。至於邊界點，則它既可以屬於，也可以不屬於圖形 $\mathscr{F}$。比如說，如果 $\mathscr{F}$ 是一個圓的內點所做成的集合，則圖形 $\mathscr{F}$ 沒有一個邊界點屬於它自己；但是如果我們把 $\mathscr{F}$ 算作是圓的全部內點以及圓周的總體，則這樣的圖形 $\mathscr{F}$ 就反過來包含它的全部邊界點。

一個圖形的全部(不管是屬於或是不屬於這個圖形的)邊界點作成的集合稱爲這個圖形的**邊界**(或**周道**)。

一個不包含它的任何邊界點(因而，它的一切點都是內點)的圖形稱爲一個**開區域**；反過來，如果一個圖形包含它的全部邊界點，則稱爲一個**閉區域**。如果我們把一個圖形 $\mathscr{F}$ 的全部內點，全部外點以及全部邊界點作成的集合分別記作 $\mathscr{M}$, $\mathscr{N}$ 與 $\mathscr{P}$，則讀者不難自己證明 $\mathscr{M}$ 與 $\mathscr{N}$ 一定都是開區域，而 $\mathscr{P}$, $\mathscr{M}+\mathscr{P}$ 與 $\mathscr{N}+\mathscr{P}$ 都是閉區域。

引理 1. **連接圖形 $\mathscr{F}$ 的一個內點 A 與一個外點 B 的直線段 AB，至少要包含這個圖形的一個邊界點。**

證明. 我們同意把一個端點是圖形 $\mathscr{F}$ 的內點，另一個端點是 $\mathscr{F}$ 的外點的這種直線段稱爲一個**正則的**直線段。按照引理的假設，線段 AB 是正則的。如果它的中點不是圖形 $\mathscr{F}$ 的邊界點，則很明顯，這個線段的兩半中必定有一半還是正則的。對於這個正則的半段我們再做同樣的推理等等。這時，或者是我們或早或晚會碰到一個分出來的線段，它的中點已經是圖形 $\mathscr{F}$ 的一個邊界點(於是引理就證明了)，或者是我們得到一個正則的線段(區間)套。於是很明顯，所有這些線段的公共點 D(§ 18 引理 1)具有下述性質：任何一個以 D 爲中心的圓都包含

無限多個正則線段,因此,既包含屬於圖形 $\mathscr{F}$ 的點又包含不屬於 $\mathscr{F}$ 的點。但是這就說明 D 是圖形 $\mathscr{F}$ 的一個邊界點。於是引理已經證明了。

3. 平面圖形的測度　在第十二章中,我們曾經對於曲邊梯形以及由曲邊梯形組成的圖形定義了面積。現在,我們有必要把面積的度量建立在更一般的基礎之上。爲了區別面積的新定義與以前講過的定義,我們現在不再談面積,我們只談平面圖形的測度。這裏,要想我們的新定義是以前定義的推廣,我們應該考慮到,必須使得對於依照我們過去的定義能夠計算面積的圖形,它的測度的確總是存在的,並且與過去所確定的面積完全一致。

假定給了我們一個任意的有界的平面圖形 $\mathscr{F}$。如圖 71 所示,在所給的平面上引兩族互相平行的直線。我們這樣來安排這兩個平行直線族,使得每一族中的每兩條相鄰的平行線間的距離都一樣。很明顯,我們所作的這個直線網把平面分成了許多彼此相等的平行四邊形,我們把這些平行四邊形叫做這個網的網眼;這裏,我們永遠將平行四邊形邊界上的一切點都屬於相應的網眼,因而每一個網眼都是一個閉區域。平行四邊形的較長的對角線顯然就是網眼的直徑。對於一切網眼,這個直徑都是一樣的,我們把它叫做所給的直線網 S 的參數,記作 $\rho(S)$,或者乾脆記作 ρ。

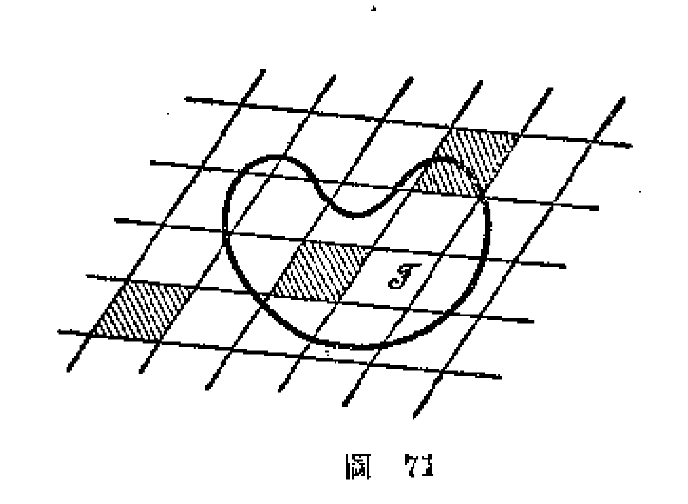


圖 71

直線網 S 的網眼,按照它們與圖形 $\mathscr{F}$ 的相互關係,可以一般地分做三類:在裏邊的網眼,它的每一個點都是圖形 $\mathscr{F}$ 的內點;在外面的網眼,它的每一個點都是圖形 $\mathscr{F}$ 的外點;最後,所有其他的網眼都叫做在邊上的網眼(在圖 71 上畫有斜線的網眼,按照它們與圖形 $\mathscr{F}$ 的

關係，表出了三類不同的網眼)。

引理 2. 每一個在邊上的網眼至少包含圖形 $\mathscr{F}$ 的一個邊界點。

證明. 事實上，要不是這樣，給定的網眼的每一個點就或者是 $\mathscr{F}$ 的內點或者是 $\mathscr{F}$ 的外點，並且這些點不能全是內點或者全是外點，因爲否則，這個網眼不是在 $\mathscr{F}$ 裏邊就是在 $\mathscr{F}$ 的外面了。因此，給定的網眼一定至少包含圖形 $\mathscr{F}$ 的一個內點 A 與一個外點 B。線段 AB 完全在給定的網眼上，根據引理1這個線段含有邊界點，這就證明了引理 2。

我們把直線網 S 的全部在 $\mathscr{F}$ 裏邊的網眼的面積之和記作 $I_S(\mathscr{F})$。當然，一般說來，對於不同的直線網，這個面積和是不同的；但是對應於所有可能的直線網，$I_S(\mathscr{F})$ 的數值集合顯然是有上界的，這是因爲按照假定圖形 $\mathscr{F}$ 有界，它可以完全包含在某一個圓 C 之內，因而不論是什麽樣的直線網 S，量 $I_S(\mathscr{F})$ 總不能超過這個圓的面積。因此，所有這些量 $I_S(\mathscr{F})$ 有一個上確界 $I(\mathscr{F})$。

定理 1. 當 $\rho(S)\to 0$ 時，$I_S(\mathscr{F})\to I(\mathscr{F})$。

和平常一樣，我們把定理 1 的論斷了解作：對於任意的 $\varepsilon>0$，都可以找到這樣一個 $\delta>0$，使得對於任何直線網 S 只要它的參數 $\rho<\delta$，就有 $I_S(\mathscr{F})>I(\mathscr{F})-\varepsilon$。

證明. 因爲 $I(\mathscr{F})$ 是數 $I_S(\mathscr{F})$ 的上確界，所以對於任何一個 $\varepsilon>0$ 都可以找到這樣一個直線網 S_0，使得

$$I_{S_0}(\mathscr{F})>I(\mathscr{F})-\varepsilon.$$

直到證明終了，我們都把這個直線網 S_0 算作是固定的。考慮直線網 S_0 的任何一個在 $\mathscr{F}$ 裏邊的網眼 Δ。這個網眼是一個閉區域；另一方面，我們知道圖形 $\mathscr{F}$ 的邊界 $\mathscr{D}$ 也是一個閉區域。又區域 Δ 與 $\mathscr{D}$ 沒有公共點，因爲網眼 Δ 的一切點都是圖形 $\mathscr{F}$ 的內點。根據 § 87 的定理 4，區域 Δ 與 $\mathscr{D}$ 之間的距離必定是一個正數。對於直線網 S_0 的任何一個在 $\mathscr{F}$ 裏邊的網眼 Δ 都可以得出這樣的論斷。如果我們用 δ 來表示所有這樣得出的距離的最小者，則很明顯，直線網 S_0 的任何一個

在 $\mathscr{F}$ 裏邊的網眼上的任何一點跟圖形 $\mathscr{F}$ 的邊界的距離都不小於 δ。

現在假定 S 是任意一個直線網，它的參數 $\rho(S)<\delta$，又假定 A 是直線網 S_0 的某一個在 $\mathscr{F}$ 裏邊的網眼上的任何一點。A 是圖形 $\mathscr{F}$ 的內點，因此應該屬於直線網 S 的某一個在 $\mathscr{F}$ 裏邊或者在 $\mathscr{F}$ 邊上的網眼；但是它不可能屬於 S 在 $\mathscr{F}$ 邊上的網眼，因爲否則根據引理 2 它與圖形 $\mathscr{F}$ 的邊界的距離就要小於 δ。因此，直線網 S_0 的任何一個在 $\mathscr{F}$ 裏邊的網眼上的任何一點，都必然屬於直線網 S 的某一個在 $\mathscr{F}$ 裏邊的網眼。因此

$$I_S(\mathscr{F})\geqslant I_{S_0}(\mathscr{F})>I(\mathscr{F})-\varepsilon,$$

這裏只要一個條件，就是直線網 S 的參數 $\rho<\delta$。而這就證明了定理 1。

任何一個直線網在 $\mathscr{F}$ 裏邊的網眼的總體，顯然都整個地屬於圖形 $\mathscr{F}$。如果我們在這個總體上，再添上所有在 $\mathscr{F}$ 邊上的網眼（這些在 $\mathscr{F}$ 邊上的網眼的面積之和我們記作 $K_S(\mathscr{F})$），則我們顯然得到一個圖形，這個圖形反過來包含了整個圖形 $\mathscr{F}$。因此，這就很清楚了，如果圖形 $\mathscr{F}$ 可以用合理的方式賦予一個確定的面積，則對於任何一個直線網 S，這個面積必須介於 $I_S(\mathscr{F})$ 與 $I_S(\mathscr{F})+K_S(\mathscr{F})$ 之間。可是我們剛剛證明了當 $\rho\to 0$ 的時候，量 $I_S(\mathscr{F})$ 總是趨向於一個確定的極限。因此，如果包含着圖形 $\mathscr{F}$ 的面積 $I_S(\mathscr{F})+K_S(\mathscr{F})$ 也趨向於這同一極限，則我們就可以很自然地把這個極限算作 $\mathscr{F}$ 的面積，或者我們現在寧願說，算作圖形 $\mathscr{F}$ 的**測度**；在這種情況下，圖形 $\mathscr{F}$ 本身稱爲是**可測的**。因爲在任何情況下，$I_S(\mathscr{F})\to I(\mathscr{F})$（定理 1），所以要想圖形 $\mathscr{F}$ 是可測的，我們必須而且只須有：

$$K_S(\mathscr{F})\to 0 \quad (\rho\to 0),$$

換句話說，**在 $\mathscr{F}$ 邊上的網眼的面積總和必須隨着直線網的參數同時趨向於零**。

這時，圖形 $\mathscr{F}$ 的測度就是我們在上面確定的量 $I(\mathscr{F})$。

4. **可測圖形的性質**　至少屬於圖形 $\mathscr{F}_1$ 與 $\mathscr{F}_2$ 之一的那種點的全體，稱爲這兩個圖形之和 $\mathscr{F}_1+\mathscr{F}_2$；仿此，可以確定任意多個圖形之和。既屬於圖形 $\mathscr{F}_1$ 又屬於圖形 $\mathscr{F}_2$ 的那種點的全體，稱爲 $\mathscr{F}_1$ 與 $\mathscr{F}_2$ 的交界或者公共部分 $\mathscr{F}_1\mathscr{F}_2$；這個定義同樣可以不經任何改變就推廣到任意多個圖形的情形。

定理 2. 如果圖形 $\mathscr{F}_1$ 與 $\mathscr{F}_2$ 都是可測的，則圖形 $\mathscr{F}_1+\mathscr{F}_2$ 也是可測的；如果 $\mathscr{F}_1$ 與 $\mathscr{F}_2$ 還沒有共同內點，則

$$I(\mathscr{F}_1+\mathscr{F}_2)=I(\mathscr{F}_1)+I(\mathscr{F}_2).$$

證明. 1) 圖形 $\mathscr{F}_1$ 或 $\mathscr{F}_2$ 的內點顯然也都是圖形 $\mathscr{F}_1+\mathscr{F}_2$ 的內點。所以圖形 $\mathscr{F}_1+\mathscr{F}_2$ 的邊界點 A，既不可能是 $\mathscr{F}_1$ 的內點也不可能是 $\mathscr{F}_2$ 的內點。可是，它又不可能同時是這兩個圖形的外點，因爲如果是這樣的話，它就應是圖形 $\mathscr{F}_1+\mathscr{F}_2$ 的外點了。因此，點 A 必然是圖形 $\mathscr{F}_1$ 與 $\mathscr{F}_2$ 中至少一個的邊界點。但是這樣一來，任何直線網 S 的每一個在圖形 $\mathscr{F}_1+\mathscr{F}_2$ 邊上的網眼，就應當或者是在 $\mathscr{F}_1$ 的邊上，或者是在 $\mathscr{F}_2$ 的邊上；因而對於任何直線網 S，都有：

$$K_S(\mathscr{F}_1+\mathscr{F}_2)\leqslant K_S(\mathscr{F}_1)+K_S(\mathscr{F}_2).$$

但是因爲圖形 $\mathscr{F}_1$ 與 $\mathscr{F}_2$ 都是可測的，所以當 $\rho\to 0$ 時，$K_S(\mathscr{F}_1)$ 與 $K_S(\mathscr{F}_2)$ 都趨向於零；因此上述不等式就說明

$$K_S(\mathscr{F}_1+\mathscr{F}_2)\to 0\quad(\rho\to 0),$$

而這也就表示圖形 $\mathscr{F}_1+\mathscr{F}_2$ 是可測的。

2) 現在假定圖形 $\mathscr{F}_1$ 與 $\mathscr{F}_2$ 沒有公共的內點。我們考慮任意一個直線網 S 的某一個在圖形 $\mathscr{F}_1+\mathscr{F}_2$ 裏邊的網眼 Δ。很明顯，網眼 Δ 不可能同時在圖形 $\mathscr{F}_1$ 與 $\mathscr{F}_2$ 的外面，因爲否則，它就也在圖形 $\mathscr{F}_1+\mathscr{F}_2$ 的外面。因此，網眼 Δ 應該至少對於 $\mathscr{F}_1$ 與 $\mathscr{F}_2$ 兩個圖形之一，或者是在裏邊，或者是在邊上，因而

$$I_S(\mathscr{F}_1+\mathscr{F}_2)\leqslant I_S(\mathscr{F}_1)+K_S(\mathscr{F}_1)+I_S(\mathscr{F}_2)+K_S(\mathscr{F}_2).\quad(1)$$

因爲 $\mathscr{F}_1$ 與 $\mathscr{F}_2$ 沒有公共的內點，所以所有在 $\mathscr{F}_1$ 裏邊的網眼與在

$\mathscr{F}_2$裏邊的網眼之和具有面積 $I_S(\mathscr{F}_1)+I_S(\mathscr{F}_2)$；但是因爲每一個這種網眼顯然都在圖形 $\mathscr{F}_1+\mathscr{F}_2$ 裏邊，所以

$$I_S(\mathscr{F}_1)+I_S(\mathscr{F}_2)\leqslant I_S(\mathscr{F}_1+\mathscr{F}_2). \tag{2}$$

從(1)與(2)就得到：

$$I_S(\mathscr{F}_1)+I_S(\mathscr{F}_2)\leqslant I_S(\mathscr{F}_1+\mathscr{F}_2)\leqslant I_S(\mathscr{F}_1)+K_S(\mathscr{F}_1)+ \\ +I_S(\mathscr{F}_2)+K_S(\mathscr{F}_2).$$

把直線網 S 取得越來越細密，並且注意到，這時候

$$I_S(\mathscr{F}_1)\to I(\mathscr{F}_1),\quad I_S(\mathscr{F}_2)\to I(\mathscr{F}_2),\quad I_S(\mathscr{F}_1+\mathscr{F}_2)\to \\ I(\mathscr{F}_1+\mathscr{F}_2),\quad K_S(\mathscr{F}_1)\to 0,\quad K_S(\mathscr{F}_2)\to 0,$$

因此，取極限後，我們就得到：

$$I(\mathscr{F}_1+\mathscr{F}_2)=I(\mathscr{F}_1)+I(\mathscr{F}_2),$$

這就是我們所要證明的。

顯然，定理 2 可以用簡單的歸納法直接推廣到任意多個圖形的情形。

定理 3. 兩個可測圖形的交界 $\mathscr{F}_1\mathscr{F}_2$ 也是可測的。

證明. 假定 A 是圖形 $\mathscr{F}_1\mathscr{F}_2$ 的任意一個邊界點。容易看出，點 A 應該是圖形 $\mathscr{F}_1$ 與 $\mathscr{F}_2$ 中至少一個的邊界點；事實上，點 A 既不可能是 $\mathscr{F}_1$ 的外點，也不可能是 $\mathscr{F}_2$ 的外點，因爲否則它就要是 $\mathscr{F}_1\mathscr{F}_2$ 的外點；但是它也不可能同時是這兩個圖形的內點，因爲那樣，它也就是 $\mathscr{F}_1\mathscr{F}_2$ 的內點了。因此，圖形 $\mathscr{F}_1\mathscr{F}_2$ 的邊界點 A 必然或者是 $\mathscr{F}_1$ 的邊界點，或者是 $\mathscr{F}_2$ 的邊界點；因而對任何一個直線網 S 來說，在 $\mathscr{F}_1\mathscr{F}_2$ 邊上的網眼，必然或者是在 $\mathscr{F}_1$ 的邊上，或者是在 $\mathscr{F}_2$ 的邊上；這就給出：

$$K_S(\mathscr{F}_1\mathscr{F}_2)\leqslant K_S(\mathscr{F}_1)+K_S(\mathscr{F}_2).$$

由於 $\mathscr{F}_1$ 與 $\mathscr{F}_2$ 的可測性，當 $\rho\to 0$ 時，右端趨向於零；這說明左端也是這樣，而這就證明了圖形 $\mathscr{F}_1\mathscr{F}_2$ 是可測的。

定理 3 顯然也可以立刻推廣到任意多個可測圖形的交界的情形。

定理 4. 假定$\mathscr{A}(\delta)$表示平面上所有那種到圖形 $\mathscr{F}$ 的邊界的距離小於 δ 的點作成的集合。於是，圖形 $\mathscr{F}$ 可測的必要充分條件是：不管 $\varepsilon>0$ 多麼小，只要 δ 充分小，集合 $\mathscr{A}(\delta)$就包含在有限個平行四邊形之內，而這些平行四邊形的面積之和小於 ε。

證明. 1) 必要性。假定圖形 $\mathscr{F}$ 可測，又 S 是一個直線網，它的 ρ 是這樣小，以至於

$$K_S(\mathscr{F})<\varepsilon.$$

δ 是直線網 S 的所有在 $\mathscr{F}$ 裏邊以及在 $\mathscr{F}$ 外面的網眼與圖形 $\mathscr{F}$ 的邊界的距離的下確界(根據 § 87 定理 4, $\delta>0$)。於是，點集合 $\mathscr{A}(\delta)$既不可能屬於直線網 S 在 $\mathscr{F}$ 裏邊的網眼，也不可能屬於它在 $\mathscr{F}$ 外面的網眼，所以集合 $\mathscr{A}(\delta)$整個包含在這個直線網在 $\mathscr{F}$ 邊上的網眼之內，而後者的面積 $K_S(\mathscr{F})$小於 ε。

2) 充分性。如果對於直線網 S 我們有 $\rho<\delta$, 則這個直線網在 $\mathscr{F}$ 邊上的網眼整個都包含在集合 $\mathscr{A}(\delta)$內；所以如果定理 4 的條件滿足，則不管 $\varepsilon>0$ 多麼小，只要 ρ 充分小時就有：

$$K_S(\mathscr{F})<\varepsilon,$$

由此可見，圖形 $\mathscr{F}$ 是可測的。

定理 4 具有一系列的重要推論。假定我們把一個可測圖形 $\mathscr{F}$ 分成具有任意形狀的若干部分，這些部分仍舊叫做網眼，關於這些網眼我們只要求它們都是可測的，又每兩個網眼都沒有公共的內點。假定用 $\rho(T)$來表示圖形 $\mathscr{F}$ 的分法 T 中網眼的最大直徑。在裏邊以及在邊上的網眼的定義照舊(換句話說，如果網眼的每一個點都是圖形 $\mathscr{F}$ 的內點，這個網眼就叫做是在裏邊的；如果不是這樣，就叫做是在邊上的)。我們用 $I_T(\mathscr{F})$來表示(關於圖形 $\mathscr{F}$ 的)分法 T 在裏邊的網眼的測度之和，$I(\mathscr{F})$仍然表示圖形 $\mathscr{F}$ 的測度。

定理 5. 如果圖形 $\mathscr{F}$ 是可測的，並且被分成可測的網眼，則當 $\rho\to 0$ 時，有：

$$I_T(\mathscr{F})\to I(\mathscr{F}).$$

說得更詳細一點，就是：對於任何 $\varepsilon>0$，都可以找到這樣一個 $\delta>0$，使得只要 $\rho(T)<\delta$，就有：

$$|I_T(\mathscr{F})-I(\mathscr{F})|<\varepsilon.$$

證明．當 $\rho(T)<\delta$ 時，分法 T 的任何一個在邊上的網眼的任何一點都屬於定理 4 中的集合 $\mathscr{A}(\delta)$，這就說明，只要 δ 充分小，所有在邊上的網眼的全體就包含在有限個平行四邊形之內，而這些平行四邊形的面積之和小於 ε。因此，在邊上的網眼的測度之和小於 ε ❶。但是所有這些（在裏邊的以及在邊上的）網眼的測度之和等於 $I(\mathscr{F})$（定理2）；所以在裏邊的網眼的測度之和 $I_T(\mathscr{F})$ 與 $I(\mathscr{F})$ 之差小於 ε，這就證明了定理 5。

5．**可測圖形的例子**　現在我們來證明，有若干類包羅得相當廣的，多少應該算是簡單的圖形，都具有可測性；並且在它們中間，那些我們以前已經用這種或那種特殊方法求出了面積的圖形，我們還要證明，對它們來說，測度與面積完全一致。

引理 3．假定函數 $y=f(x)$ 在區間 (a,b) 上連續，又假定對於任何 $\delta>0$，$\mathscr{A}(\delta)$ 是平面上到曲線 $y=f(x)$ $(a\leqslant x\leqslant b)$ 的距離小於 δ 的所有那些點做成的集合。於是，不管 $\varepsilon>0$ 怎樣小，只要 δ 充分小時，集合 $\mathscr{A}(\delta)$ 就可以被有限個矩形蓋住，其中這些矩形的面積之和小於 ε。

證明．把區間 (a,b) 分成 n 等份，各長 $\frac{b-a}{n}=\delta$，又假定 n 選得這樣大，使得函數 $f(x)$ 在任何一個長度小於或者等於 δ 的區間上的振幅都不超過 ε。假定分點是 $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$，於是 $x_k-x_{k-1}=\delta$

❶ 嚴格地說，作爲這個論斷的基礎，我們還需要證明：1）如果可測圖形 $\mathscr{F}_1$ 包含在可測圖形 $\mathscr{F}_2$ 內，則 $I(\mathscr{F}_1)\leqslant I(\mathscr{F}_2)$；2）平行四邊形的測度就等於它的面積。這些論斷的第一個可以直接從測度的定義推出，讀者不難獨自證明。至於第二個，它幾乎是顯然的，稍遲一點（定理 6）就會得到證明。

$(1\leqslant k\leqslant n)$。我們用 M_k 與 m_k 分別表示函數 $f(x)$ 在長 δ 的區間 (x_{k-1}, x_k) 上的最大與最小值，於是，$M_k-m_k\leqslant\varepsilon$（圖 72）。

假定 MN 表示曲線 $y=f(x)$ 在 $x_{k-1}\leqslant x\leqslant x_k$ 的那一段。於是很明顯，平面上每一個到弧 MN 的距離小於 δ 的點，都應該位於 1）長條 $x_{k-1}-\delta<x<x_k+\delta$ 之內；2）長條 $m_k-\delta<y<M_k+\delta$ 之內，換句話說，位於矩形 $(x_{k-1}-\delta<x<x_k+\delta,\ m_k-\delta<y<M_k+\delta)$ 之內，而這個矩形的面積等於

$$3\delta(M_k-m_k+2\delta)\leqslant 3\,\delta(\varepsilon+2\delta);$$

對於每一個 k $(1\leqslant k\leqslant n)$ 都有這樣一個矩形，所有這些矩形的面積之和不超過 $3\delta(\varepsilon+2\delta)n=3(b-a)(\varepsilon+2\delta)$，這就說明，只要 ε 充分小又 n 充分大時，它就可以任意地小。因爲全部這些矩形蓋住了集合 $\mathscr{A}(\delta)$，所以引理 3 已經證明了。

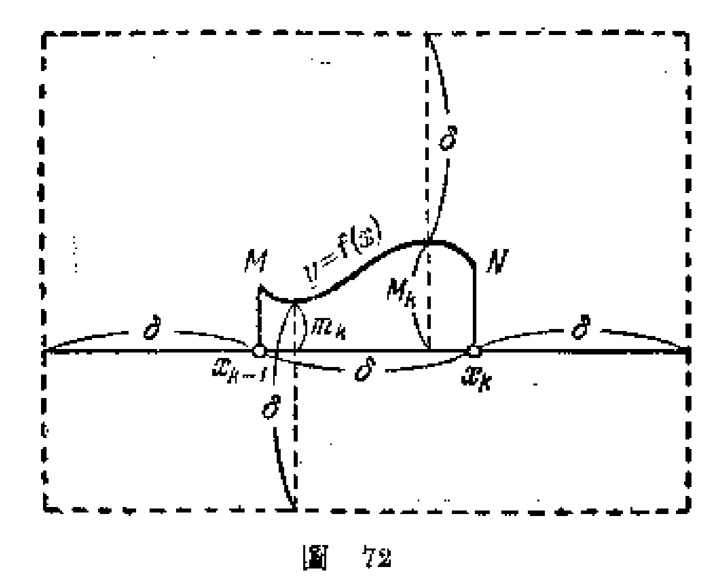


圖 72

現在假定圖形 $\mathscr{F}$ 的邊界是這樣的一條閉曲線，這條曲線可以分成有限段使得每一段的方程或者是某一個 $y=f(x)$，或者是某一個 $x=\varphi(y)$。我們把引理 3 應用到這條閉曲線的每一段，於是我們立刻看出，當 δ 充分小時，對圖形 $\mathscr{F}$ 的整個邊界所做的集合 $\mathscr{A}(\delta)$ 可以被有限個矩形蓋住，而這些矩形的面積之和可以任意地小。根據定理 4，這就推出了下述的定理。

定理 6. 如果圖形 $\mathscr{F}$ 的邊界可以分成有限個小段，又每一小段都可以用方程 $y=f(x)$, $x=\varphi(y)$ 之一來表達（其中 f 與 φ 都是連續函數），則圖形 $\mathscr{F}$ 是可測的。

特別說來，所有那些我們在第十二章中已經會求面積的曲邊梯形

都是可測的，並且對每一個這種梯形來說，它的測度都與我們用第十二章的方法確定的面積相等。事實上從定理 6，首先可以推出每個多角形都是可測的。特別是，任何矩形都是可測的，因而，要想確定它的測度，我們可以選用具有任何兩個方向的兩組平行直線做成的直線網；當然不妨就取平行於這個矩形的兩邊的那些直線，於是我們立刻就看出，矩形的測度與它原來定義的面積的確相等。由此，再根據定理 2，我們立刻推出，對於任何一個由有限個矩形組成的圖形，這個結論也同樣正確。但是，在第十二章裏，對於一個給定的分法 T，"大和" $S(T)$ 與 "小和" $s(T)$ 就正是幾何地解釋作這樣一種圖形的。因此，對於任何分法 T，曲邊梯形(它包含在"大和"的圖形內但又包含着"小和"的圖形)的測度，永遠介於 $s(T)$ 與 $S(T)$ 之間。但是因爲這個曲邊梯形的面積，也同樣是永遠介於 $s(T)$ 與 $S(T)$ 之間的，所以測度與面積之差的絕對值不會超過 $S(T)-s(T)$，從而當函數 $f(x)$ 連續時，這個差要等於零，因爲我們只要適當地選擇分法 T 就可以使得差 $S(T)-s(T)$ 任意地小。

最後，讓我們來考慮由參變方程

$$x=\varphi(t),\quad y=\psi(t), \tag{3}$$

表達的曲線，其中函數 φ 與 ψ 都在參變量 t 的某個變化區間 (t_0, t_1) 上連續並且具有連續的導數，又我們假定在這個區間上沒有一個點使得同時有 $\varphi'(t)=\psi'(t)=0$。假定 t 是區間 (t_0, t_1) 的任意一點，並且爲確定起見我們假定 $\varphi'(t)\neq 0$；既然函數 $\varphi'(t)$ 連續，它就要在點 t 的某個鄰域內不變號，因此，函數 $x=\varphi(t)$ 在包含點 t 的某個區間上是連續而且單調的；在這個情形下，我們知道(§ 23)在這一小段曲線上 t 是 x 的單值函數，因而 $y=\psi(t)$ 在這一小段曲線上也是 x 的單值函數。因此，區間 $t_0\leqslant t\leqslant t_1$ 的每一個點可以用這樣一個小區間蓋住，在這個小區間上的那一段曲線(3)或者可以表作方程 $y=f_1(x)$，或者可以表作方程 $x=f_2(y)$(這裏函數 f_1 與 f_2 在相應的部分上還都是連續的)。

如果我們對全體這樣的區間應用有限覆蓋定理(§ 18 定理 2)，則

我們立刻就知道，曲線(3)可以分成有限個小段，每一小段曲線都可以用方程 $y=f_1(x)$ 與 $x=f_2(y)$ 之一來表達（f_1 與 f_2 都是連續的）。根據定理 6，這就導出了下述命題：

定理 7. 假定圖形 $\mathscr{F}$ 的邊界可以分成有限個部分，每一部分都可以用具有形式(3)的方程來表達，其中 $\varphi(t)$ 與 $\psi(t)$ 在相應的部分上具有不同時爲零的連續導數。則圖形 $\mathscr{F}$ 是可測的。

§ 115. 柱體的體積

在第十二章中我們曾經指出，在一元函數的情形，任意形狀的曲線所圍成的圖形的面積計算問題是一個基本問題，這個問題引起了積分學的創立並推動了它的成長與發展；當時我們也正是在這個問題上第一次接觸到積分的概念。在二元函數的情形，任意形狀的曲面所圍成的幾何立體的體積計算問題，扮演着完全類似的角色。在這個問題上，初等幾何並沒有教給我們多少東西；除多面體（換句話說，完全由一些平面圍成的幾何立體）外，它僅僅研究了以球面、圓錐曲面以及圓柱面的一部分（有時也有一些平面部分）作爲邊界的幾何立體的體積。我們現在要從這樣一件工作開始，試圖對一些比較廣泛類型的曲面圍成的幾何立體來建立體積的定義並且提供出計算它的方法。

就像在討論面積的時候（第十二章），我們在一開始進行研究時先把一般問題歸結到某些特殊類型圖形（曲邊梯形）的面積計算問題一樣，現在，我們同樣把我們的注意力集中在某些特殊形狀的幾何立體的體積計算上，我們把這些特殊的幾何立體叫做"柱"體。不難看出，任何一個多少算簡單一些的立體都可以分解成個數不多的這種柱體；因而，既然會求柱體的體積，我們就不難計算任何一個不過於複雜的幾何立體的體積。

假定在某一個平面上給定了一個可測圖形 $\mathscr{D}$（圖 73），我們把這個平面算作座標面 XOY。另一方面，又假定在空間中給定了某一個展

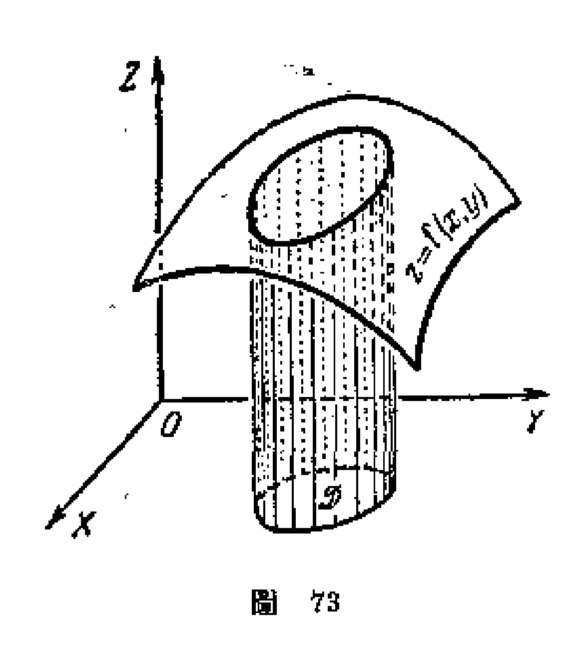


圖 73

佈在圖形 $\mathscr{D}$ 之上的曲面，每一條平行於 OZ 軸的直線與這個曲面相交不多於一個點；這樣一個曲面的方程可以寫成

$$Z=f(x, y), \qquad (1)$$

這裏，我們假定函數 $f(x, y)$ 是正的，並且在某一個包含圖形 $\mathscr{D}$ 的矩形上連續。現在從圖形 $\mathscr{D}$ 的邊界的每一點引垂直於平面 XOY 的直線，把它延長一直到與曲面(1)相交爲止。整個這些直線的全體是一個柱面，它的母線平行於 OZ 軸。這樣一來，我們就得到了一個幾何立體，它以圖形 $\mathscr{D}$ 爲下界限，以剛才所說的柱面做爲側面，而以曲面(1)爲上界限；我們把這樣一個立體叫做一個柱體。給出這樣一個立體體積的定義與計算方法就是我們本節的任務。顯然，這個問題與曲邊梯形的面積問題完全相仿。這裏使得情况變得複雜的原因，主要是曲邊梯形總是簡單地以線段作爲下界限，而柱體的下界限則是任意形狀的可測圖形 $\mathscr{D}$。不過，這種複雜性是由二維連續統本身的性質所引起的：在直線上(換句話說，在一維連續統上)我們只有一種最簡單的可測圖形，那就是線段；然而，在平面上，即使我們只限於最簡單的圖形，我們也立刻就碰到無數個各色各樣的這種圖形。這就使得我們在二維的情形，寧願一開始就考慮以任意可測圖形來作爲"積分區域"。

一當我們着手實現我們的計劃——仿照定義曲邊梯形面積的辦法來定義柱體的體積，上述差別就立刻顯露出來。在那裏，我們是從區間 (a, b) (給定的梯形的下界限)的分法開始，把它任意地分成一些小區間。在這裏，我們自然也就從把圖形 $\mathscr{D}$ 分成一些部分圖形的任意分法開始，我們把這些部分圖形都叫做小區域。那麼這些小區域究竟應該

具有什麼樣的形狀呢?很明顯,在現在的情形,比起以前來,無疑地有了更多選擇的可能性。可是回想一下，在以前，我們寧願儘可能對小區間的選擇不加什麼限制，為的是使得我們的理論的確能够包括所給區間的一切可能的分法。因而我們現在也要設法儘可能對小區域的選擇不加限制。我們當然應該要求每一個小區域都具有確定的面積，換句話說，都是可測圖形;還有，我們當然還要假定每兩個不同的小區域都沒有公共內點;在其他方面，小區域的大小、形狀以及相互間的位置就都可以任意地選擇了。我們把區域 $\mathscr{D}$ 的這樣一個分法 T 的小區域依任意次序記作 $\Delta_1, \Delta_2, \cdots, \Delta_n$; 假定 Δ_k 同時也代表它所代表的小區域的測度。

現在,我們在每一個小區域 Δ_k 上任意取一點(ξ_k, η_k)。乘積

$$f(\xi_k, \eta_k)\Delta_k \tag{2}$$

表達出一個以小區域 Δ_k 為底,以量 $f(\xi_k, \eta_k)$ 為高的鉛直柱體的體積。如果小區域 Δ_k 很小,則根據函數 $f(x, y)$的連續性，這個函數在 Δ_k 的不同的點的值彼此相差也很小，因而特別是與量 $f(\xi_k, \eta_k)$相差很小。如果我們設想從我們的柱體內挖出來位於小區域 Δ_k 之上的那個細條柱,十分明顯,這個細條柱的體積與那個以 Δ_k 為底以 $f(\xi_k, \eta_k)$ 為高的鉛直柱體的體積(即量(2))相差很小。如果所有的小區域都是很小,則整個柱體的體積既然等於所有這些細條柱的體積的總和，它就應該與和數

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k)\Delta_k \tag{3}$$

相差很小。

我們再強調一下，我們以上所用的圖形 $\mathscr{D}$ 的分法 T(僅僅要求小區域 Δ_k 都是可測的而且充分小)以及在不同的小區域上點 (ξ_k, η_k)的取法，兩者都是完全任意的。

現在,已經很清楚了，今後我們應該把分法 T 取得越來越“細密”。

但是什麼叫取得越來越細密呢?回想以前在計算面積時,我們曾經用最大的小區間之長 $l(T)$ 來估計分法 T 的"細密程度"。現在,我們當然應該仿照着來做。但是,什麼樣的數能够用來度量小區域的大小呢? 不難看出,小區域的測度是不適合這個要求的;因爲事實上,我們之所以設法要把小區域取得很小是爲了使得同一個小區域上的任何兩點彼此很靠近;然而小區域的測度小並不能保證它就有這個性質(可以看一下小區域是很扁的矩形的情形)。現在回想起我們曾經把平面圖形的一切可能的每兩點間的距離的上確界叫做它的**直徑**。所以,要想使得小區域 Δ_k 的任意兩點間的距離很小,就必須而且也只須 Δ_k 的直徑很小。因此,如果我們用 $d(T)$ 來表示分法 T 的小區域的直徑之中的最大者,則用量 $d(T)$ 來衡量和估計這個分法的"細密程度"是很恰當的。當 $d(T)\to 0$ 時而且也只在這時,我們才說變動的分法 T 是在"無限變細"。

進一步的考慮已經很明顯地跟確定曲邊梯形的面積的辦法沒有什麼不同了。如果當分法 T 無限變細,又點 (ξ_k, η_k) 在相應的小區域上任意選取時,和數 (3) 趨向於一個既不依賴於分法 T 的取法也不依賴於每個小區域上點 (ξ_k, η_k) 的取法的極限 V,則我們就把這個極限 V 叫做給定的柱體的體積,並且寫作

$$V=\lim_{d(T)\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k)\Delta_k. \tag{4}$$

很清楚,根據以上所說的,這個寫法的精確意義(完全符合於我們在 §15 中所說的極限過程的廣義理解)就是:不管 $\varepsilon>0$ 多麼小,總可以找到這樣一個 $\delta>0$,使得對於任意的分法 T,只要 $d(T)<\delta$,不管在這個分法的小區域上怎樣選取點 (ξ_k, η_k),我們都永遠有不等式

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k)\Delta_k - V\right|<\varepsilon.$$

這樣一來，柱體體積的定義就建立起來了。至於談到這個體積的實際計算方法，則上面所說的定義旣然是具有結構性的，所以在形式上應該算是已經給出了這樣一個方法。不過，在實際應用上，這個方法由於它本身的複雜性，它所能够給予我們的東西，比起以前在聯繫到曲邊梯形的面積定義時的那個計算方法所能够給予我們的還要更少一些。所以，這裏跟那裏一樣，我們應當認爲，提供一個在實際應用上眞正合適的計算體積的方法，仍然是擺在我們面前的一個問題。

當然，我們以上的討論還一點也沒有談到究竟在什麼樣的條件下，柱體體積的定義裏所述的極限才的確存在並且不依賴於它的某些組成因素。所以在下面我們還要進行這一方面問題的討論。

§ 116. 二重積分

像我們過去在一維的情形（§ 14）一樣，在這裏也可以列舉出一系列的幾何與物理的問題，這些問題的解決都是歸結到像 § 115 中(4)式那種形式的極限的計算（非均勻薄片的質量，重心與轉動慣量等等❶）。所以，跟那兒一樣，在這裏有必要來研究這種極限的一般性質，並且提供出它的一些實際有效的計算方法。

我們自然是從一些術語和符號的建立開始。對於一個給定的函數 $f(x, y)$ 與一個給定的可測圖形 $\mathscr{D}$，如果 § 115 的(4)型的極限存在，則我們把這個極限叫做函數 $f(x, y)$ 展佈在"積分區域" $\mathscr{D}$ 上的一個二重積分，記作

$$\iint\limits_{\mathscr{D}} f(x, y)\, d\sigma \text{ 或者 } \iint\limits_{\mathscr{D}} f(x, y)\, dx\, dy.$$

在第一個記法中，符號 $d\sigma$（"面積元素"）應該使我們聯想到，積分的來源是把極限手續用到"積分和"

❶ 在 § 120 中我們要討論某一些這類問題。

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k)\Delta_k$$

上得來的。我們知道，這裏小區域 Δ_k 的形狀是任意的；最方便的是把小區域就取成兩邊平行於坐標軸的長方形；於是積分和成爲

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k)\,\Delta x\,\Delta y,$$

而我們上面指出的二重積分的第二種記法就是爲了要使我們聯想到這一段淵源，我們以後主要是利用第二種符號。當然，這兩種記法的意義實在是一樣的。

當函數 $f(x, y)$ 展佈在 $\mathscr{D}$ 上的積分存在時，我們說這個函數在區域 $\mathscr{D}$ 上是**可積的**。這裏，對函數 $f(x, y)$ 來說，除了要求它在積分區域的每一點都有定義，並且在這個區域上有界而外，我們實際上並不預先要求別的什麼。特別是我們沒有必要假定它連續；當然它也可以取負值（當然在這種一般情形下，我們在 § 115 中所說的二重積分的簡單的幾何解釋就失掉了意義）。

跟一維的情形一樣，在建立二重積分的理論時，仿照一維情形（§ 47）所做的大和與小和起着很大的作用。

假定 M 與 m 分別是函數 $f(x, y)$ 在區域 $\mathscr{D}$ 上的上確界與下確界。假定我們用（可測的）小區域 $\Delta_1, \Delta_2, \cdots, \Delta_n$ 給出這個區域的一個任意分法 T，又假定 M_k 與 m_k 分別是函數 $f(x, y)$ 在小區域 Δ_k 上的上確界與下確界。於是我們做和數

$$S_T = \sum_{k=1}^{n} M_k\Delta_k, \qquad s_T = \sum_{k=1}^{n} m_k\Delta_k,$$

很明顯，這兩個和數都由分法 T 唯一地確定了，跟以前一樣，我們把它們分別叫做這個分法的**大和**與**小和**。這兩個和數具有一維情形的大和

與小和的一切性質（§47 性質 1°—4°）；所有的證明也跟以前一樣，僅僅是 Δ_k 現在是可測平面圖形。在那些用到區間 (a, b) 的長度 $b-a$ 的地方，我們應該用相應的區域的面積 D 來代替。在證明 3° 中，必需注意，根據 §114 的定理 3，小區域 Δ_{kl} 都是可測的。

跟一維積分的情形一樣，我們規定把量 $\omega_k = M_k - m_k$ 稱爲函數 $f(x, y)$ 在小區域 Δ_k 上的**振幅**。不難重新證明，下列簡單關係

$$S_T - s_T = \sum_{k=1}^{n} \omega_k \Delta_k \to 0 \quad [d(T) \to 0] \tag{1}$$

是函數 $f(x, y)$ 在區域 $\mathscr{D}$ 上可積的必要充分條件。這個命題，可以完全仿照一維的情形來證明。

跟一維的情形一樣，這個可積性的判別準則的一個重要推論：是一切連續函數都可積。我們知道（§88），在一個有界閉區域 $\mathscr{D}$ 上連續的函數 $f(x, y)$，在這個區域上是**一致連續**的。因而，只要 $d(T)$ 充分小，函數 $f(x, y)$ 在分法 T 的任何一個小區域上的振幅就都可以小於一個不論多麼小的預先給定的正數 ε；但是由此就推出，當 $d(T)$ 充分小時

$$\sum_{k=1}^{n} \omega_k \Delta_k < \varepsilon \sum_{k=1}^{n} \Delta_k = \varepsilon D;$$

因爲 $\varepsilon > 0$ 可以任意小，所以關係(1)成立，因而函數 $f(x, y)$ 在區域 $\mathscr{D}$ 上可積。

在簡單（一重）積分的情形，我們已經看到，對於有界函數來說，有限個間斷點的存在並不妨害它的可積性（§48 定理 4）。在這裏，可以用相仿的辦法證明，如果有界函數 $f(x, y)$ 的全部間斷點只分佈在區域 $\mathscr{D}$ 上的有限條類型足够簡單的曲線上，則 $f(x, y)$ 在 $\mathscr{D}$ 上是可積的。不過，在這裏我們不證明這個命題了。

二重積分具有一系列與簡單積分完全相似的簡單性質；這些性質

的證明多半都很簡單，也只要完全仿照簡單積分的相應證明來進行證明。所以，我們這裏不妨只把這些性質中的一些比較重要的列舉出來，它們的證明就留給讀者去完成了❶。

1°. 如果函數 $f_1(x, y)$ 與 $f_2(x, y)$ 都在區域 $\mathscr{D}$ 上可積，則它們的和也在這個區域上可積，並且

$$\iint_{\mathscr{D}} [f_1(x, y)+f_2(x, y)]\,dx\,dy=$$

$$=\iint_{\mathscr{D}} f_1(x, y)dx\,dy+\iint_{\mathscr{D}} f_2(x, y)\,dx\,dy.$$

2°. 如果 k 是任意一個常數，又 $f(x, y)$ 在區域 $\mathscr{D}$ 上可積，則函數 $kf(x, y)$ 也在這個區域上可積，並且

$$\iint_{\mathscr{D}} kf(x, y)\,dx\,dy=k\iint_{\mathscr{D}} f(x, y)\,dx\,dy.$$

3°. 如果函數 $f(x, y)$ 在區域 $\mathscr{D}_1$ 與 $\mathscr{D}_2$ 上都可積，則它在區域 $\mathscr{D}_1+\mathscr{D}_2$ 上也可積；如果 $\mathscr{D}_1$ 與 $\mathscr{D}_2$ 還沒有公共內點，則

$$\iint_{\mathscr{D}_1+\mathscr{D}_2} f(x, y)\,dx\,dy=\iint_{\mathscr{D}_1} f(x, y)\,dx\,dy+\iint_{\mathscr{D}_2} f(x, y)\,dx\,dy.$$

4°. 如果函數 $f_1(x, y)$ 與 $f_2(x, y)$ 都在區域 $\mathscr{D}$ 上可積，又如果在這個區域的每一點都有 $f_1\leqslant f_2$，則

$$\iint_{\mathscr{D}} f_1(x, y)\,dxdy\leqslant\iint_{\mathscr{D}} f_2(x, y)\,dx\,dy.$$

5°. 如果函數 $f(x, y)$ 在區域 $\mathscr{D}$ 上可積，則函數 $|f(x, y)|$ 也在這個區域上可積，並且

$$\left|\iint_{\mathscr{D}} f(x, y)\,dx\,dy\right|\leqslant\iint_{\mathscr{D}} |f(x, y)|\,dx\,dy.$$

❶ 我們提醒一下，在今後，積分區域永遠可以是任何一個可測平面圖形。

6°. 如果函數 $f(x,y)$在區域 $\mathscr{D}$ 上可積，又如果在這個區域的每一點都有 $m\leqslant f(x,y)\leqslant M$，則

$$mD\leqslant \iint\limits_{\mathscr{D}} f(x,y)\,dx\,dy\leqslant MD,$$

其中，D是 $\mathscr{D}$ 的測度。

7°.(中值定理).如果函數 $f(x,y)$在閉區域 $\mathscr{D}$ 上連續，又這個區域是"連通"的，換句話說，它的任意兩點都可以用完全屬於區域 $\mathscr{D}$ 的折線連接起來，則在這個區域上一定可以找到這樣一點(ξ,η)，使得

$$\iint\limits_{\mathscr{D}} f(x,y)\,dx\,dy=f(\xi,\eta)D.$$

爲了證明這個事實，我們需要把函數 $f(x,y)$取最大值M的點與函數取最小值m的點用屬於區域 $\mathscr{D}$ 的折線連接起來。於是沿着這條折線，f 可以看作是用某種適當方式選擇的一個參變量 λ 的連續函數(例如，可以把 λ 定義作從起點算起到給定的點爲止的那一段折線的長度)。對於這樣一個在參變量 λ 的變化區間的兩端分別等於 M 與 m 的連續函數，我們可以應用 § 23 的定理 3. 因爲根據 6°

$$m\leqslant\frac{1}{D}\iint\limits_{\mathscr{D}} f(x,y)\,dx\,dy\leqslant M,$$

所以在上述折線上（因而在區域 $\mathscr{D}$ 上），一定可以找到一個點(ξ,η)，使得

$$f(\xi,\eta)=\frac{1}{D}\iint\limits_{\mathscr{D}} f(x,y)\,dx\,dy,$$

而這就是我們需要證明的。

最後，我們還指出 § 114 的定理 5 的一個重要推論，我們在以後要不止一次地用到這個推論。假定函數 $f(x,y)$ 在區域 $\mathscr{D}$ 上可積；它的積分，按定義，是和數

$$\sum_k f(\xi_k,\eta_k)\Delta_k$$

在區域 $\mathscr{D}$ 的分法 T 的小區域的最大直徑趨向於零時的極限。在小區域 Δ_k 中，我們來區別那些在 $\mathscr{D}$ 裏邊的與在 $\mathscr{D}$ 邊上的；我們規定用 $\sum_1$ 來表示所有在 $\mathscr{D}$ 裏邊的小區域的總和，用 $\sum_2$ 表示所有在 $\mathscr{D}$ 邊上的小區域的總和，於是

$$\sum_k f(\xi_k, \eta_k)\Delta_k = \sum_1 f(\xi_k, \eta_k)\Delta_k + \sum_2 f(\xi_k, \eta_k)\Delta_k$$

又

$$\sum_k \Delta_k = \sum_1 \Delta_k + \sum_2 \Delta_k.$$

如果 μ 是函數 $|f(x, y)|$ 在區域 $\mathscr{D}$ 上的上確界，則

$$\left|\sum_2 f(\xi_k, \eta_k)\Delta_k\right| \leqslant \mu \sum_2 \Delta_k = \mu\left(\sum_k \Delta_k - \sum_1 \Delta_k\right).$$

但是 § 114 的定理 5 告訴我們，在分法無限變細的情況下

$$\sum_1 \Delta_k \to \sum_k \Delta_k,$$

(後一個和數自然就是區域 $\mathscr{D}$ 的測度)；所以，當 $d(T) \to 0$ 時

$$\sum_2 f(\xi_k, \eta_k)\Delta_k \to 0,$$

因而

$$\iint_{\mathscr{D}} f(x, y)\, dx\, dy = \lim \sum_k f(\xi_k, \eta_k)\Delta_k = \lim \sum_1 f(\xi_k, \eta_k)\Delta_k.$$

定理. 如果函數 $f(x, y)$ 在區域 $\mathscr{D}$ 上可積，則

$$\iint_{\mathscr{D}} f(x, y)\, dx\, dy = \lim_{d(T)\to 0} \sum_1 f(\xi_k, \eta_k)\Delta_k,$$

其中和 $\sum_1$ 僅僅牽涉到分法 T 在 $\mathscr{D}$ 裏邊的小區域。

附註. 如果我們規定求和符號 $\sum_1$ 除包含全部在 $\mathscr{D}$ 裏邊的小區域外，還包含某一些（隨便多少）在 $\mathscr{D}$ 邊上的小區域（於是，求和符號 $\sum_2$

就包含所有其餘的在 $\mathscr{D}$ 邊上的小區域)，我們以上證明的定理事實上仍然是對的。證明也無須更動。

§ 117. 用兩次簡單積分來計算二重積分

我們已經說過，我們所給的二重積分的定義同時也給出了它的計算方法，不過這個方法，由於本身的累贅，在具體應用上受到很大的限制。所以我們應該研究怎樣才能夠實際處理二重積分的計算問題。在壓倒多數的情況下，這種實際可行的計算，可以利用把二重積分化爲連續兩次的簡單(一重)積分而得到實現。本節中我們就來說明這個一般方法的基本原理。

假定有一個二重積分展佈在一個閉區域(可測圖形) $\mathscr{D}$ 上，又假定區域 $\mathscr{D}$ 具有這樣一個性質，任何一條平行於兩個座標軸之一的直線與它的邊界相交都不超過兩個點(如圖 74；由於這個要求，我們就不再討論像圖 75 所示的那種區域；其實，這種區域，只要相當簡單，就常常可

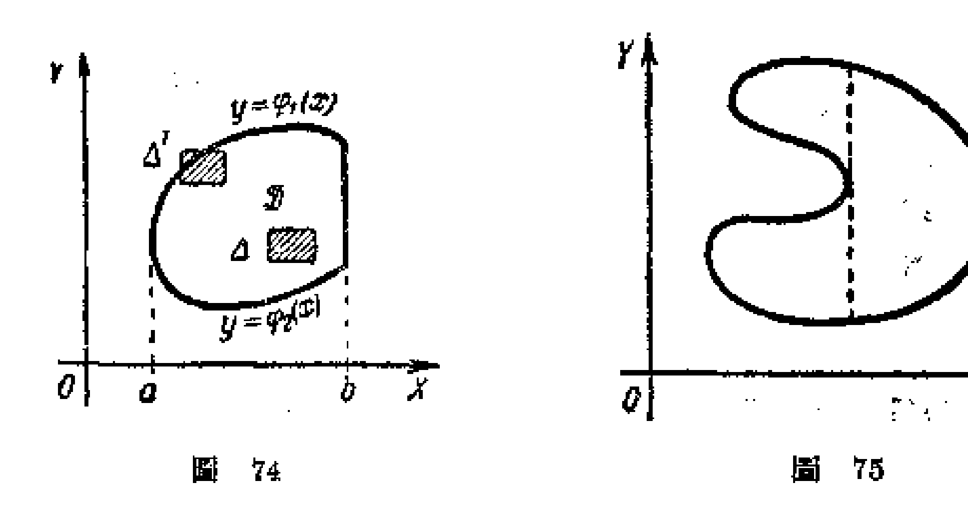


圖 74　　圖 75

以分成若干部分，使每一部分都具有所要求的形狀，例如，在圖 75 中我們用虛線來劃分區域就可以辦到這一點)；在這些與邊界有交點的平行線中，只允許最左的或最右的一條可以例外：它們可以與區域 $\mathscr{D}$ 的邊界的公共部分可以是整個一個線段(在圖 74 上，極右端的直線就是如此)。

我們假定函數 $f(x, y)$ 在區域 $\mathscr{D}$ 上連續。於是，積分

$$I=\iint_{\mathscr{D}} f(x, y)\, dx\, dy$$

自然存在，並且（根據前節的最後一個定理，參看那裏的附註）等於當 $d(T)\to 0$ 時，和數

$$\sum_1 f(\xi_k, \eta_k)\Delta_k$$

的極限（其中 ξ_k, η_k 是在分法 T 的小區域 Δ_k 上任意取定的一點的座標，又求和符號包括這個分法的一切在 $\mathscr{D}$ 裏邊的小區域以及任意多個在 $\mathscr{D}$ 邊上的小區域）；這個極限既不依賴於分法 T 的取法，也不依賴於在這些分法的小區域上點 (ξ_k, η_k) 的取法。所以，爲了得到我們所需要的把積分 I 的計算化爲連續兩次簡單積分，我們就可以用最適宜於這個目的的方式來選取分法 T，以及這些分法的小區域上的點 (ξ_k, η_k)，僅僅只要使 $d(T)\to 0$ 就行了。

假定任意給定一個 $\varepsilon>0$；於是，當 $\delta>0$ 充分小時，對於任何一個滿足 $d(T)<\delta$ 的分法 T（以及在這個分法的小區域上任意取定的點 (ξ_k, η_k)），我們都有：

$$\left| I-\sum_1 f(\xi_k, \eta_k)\Delta_k \right| <\varepsilon. \tag{1}$$

現在我們用某種完全確定的方式來選取這樣一些分法。把區域 $\mathscr{D}$（圖74）的邊界的上半與下半的方程分別寫成像 $y=\varphi_1(x)$ 與 $y=\varphi_2(x)$ 的形式，我們假定這兩個函數都在區間 (a, b) 上連續（這裏 a 與 b 分別是區域 $\mathscr{D}$ 的點的最小橫座標與最大的橫座標）。於是根據一致連續性定理，總可以找到這樣一個 $h_0>0$，使得只要 $a\leqslant x'<x''\leqslant b$ 以及 $|x'-x''|<h_0$，我們就有：

$$|\varphi_1(x')-\varphi_1(x'')|<\frac{\delta}{2}, \quad |\varphi_2(x')-\varphi_2(x'')|<\frac{\delta}{2}. \tag{2}$$

現在，我們用分點

$$a=x_0, x_1, \cdots, x_n=b$$

把區間(a, b)分成這樣多等份，使得

$$x_i - x_{i-1} = h < h_0 \qquad (1 \leqslant i \leqslant n)$$

與 $h < \frac{\delta}{2}$ 同時成立。通過每一個分點引直線平行於 OY。所有這些直線把區域 $\mathscr{D}$ 分成許多豎長條（圖 76）。以下，我們要分別對每一個這種長條再進行分割來做出 $\mathscr{D}$ 的一個分法。

圖 77 表示這些豎長條之中介於直線 $x=x_i$ 與 $x=x_{i+1}$ 的那一個。假定 M_1 與 m_1 分別是函數 $\varphi_1(x)$ 在這個長條上的最大值與最小值，又 M_2 與 m_2 分別是函數 $\varphi_2(x)$ 在這個長條上的最大值與最小值。因為 $h<h_0$，所以，從不等式(2)立刻知道

$$M_1 - m_1 < \frac{\delta}{2}, \qquad M_2 - m_2 < \frac{\delta}{2}. \tag{3}$$

在我們的長條上（圖 77），引高度分別等於 m_2, M_2, m_1, M_1 的平行於 OX 的直線（為簡單起見，我們假定 $M_2<m_1$），把 OY 軸的 $M_2 \leqslant y \leqslant m_1$ 那一段分成一些等份，然後通過每一個分點也同樣引平行於 OX 的直線。區域 $\mathscr{D}$ 的這個長條部分

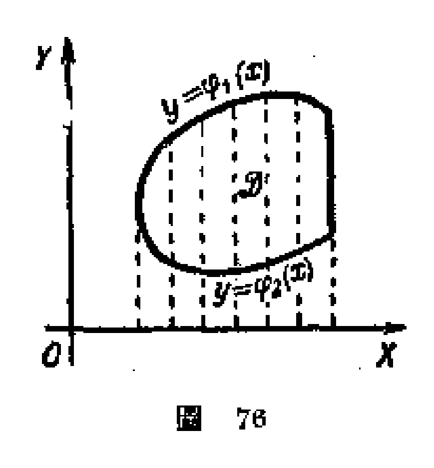


圖 76

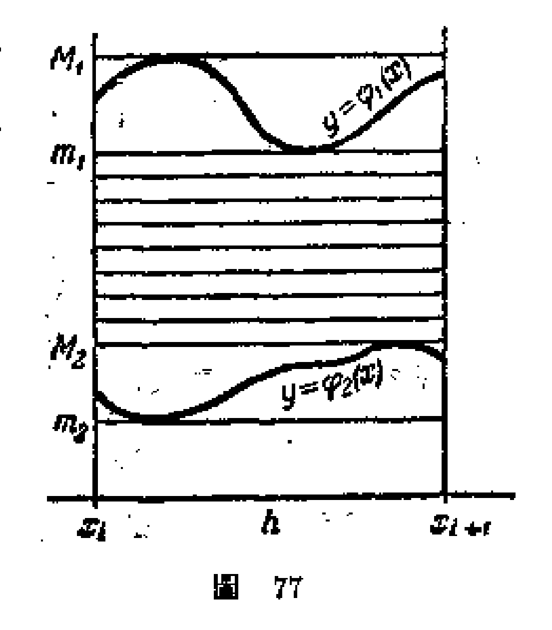


圖 77

被長條上的這些直線分成了許多部分，我們把這些部分算作我們的分法 T 的小區域。這裏，我們還沒有確定究竟應該把區間 $M_2 \leqslant y \leqslant m_1$ 分成多少等份；現在我們就來考慮這個問題。

在長條的每一個用以上這樣的辦法做出來的小區域 Δ_k 上，我們就

取 $\xi_k = x_i$（因而，對這個長條的一切小區域取的是同一個 ξ_k），而 η_k 可以任意選擇。這個長條的最下面一個小區域包含在一個邊長是 $h<\frac{\delta}{2}$ 與 $M_2-m_2<\frac{\delta}{2}$ 的矩形內，它的直徑不會超過 $\sqrt{h^2+(M_2-m_2)^2}<$ $<\frac{\delta}{\sqrt{2}}<\delta$。對於最上面的那個小區域，顯然也有同樣的情形。至於這個長條的其他的小區域，只要我們把區間 $M_2\leqslant y\leqslant m_1$ 分成相當多的等份，則所有這些小區域因為都是矩形，它們每一個的直徑都會小於 δ。這些矩形之中的最上面和最下面的兩個顯然都是我們的分法中在 $\mathscr{D}$ 邊上的小區域，其他的則都是在 $\mathscr{D}$ 裏邊的小區域。

積分和

$$\sum_k f(\xi_k, \eta_k)\Delta_k$$

牽涉到長條的全部矩形小區域的那一部分可以寫成

$$\sum_{l=0}^{m-1} f(x_i, y_l)hh',$$

其中 h' 是區間 (M_2, m_1) 的兩個相鄰分點之間的距離，而 y_l 是任意一個介於兩個這種相鄰分點之間的數。

但是，當 $h'\to 0$ 時，和數

$$\sum_{l=0}^{m-1} f(x_i, y_l)h'$$

以積分

$$\int_{M_2}^{m_1} f(x_i, y)\,dy$$

為極限。所以，對於足夠小的 h'，我們有：

$$\left|\sum_{l=0}^{m-1} f(x_i, y_l)hh' - h\int_{M_2}^{m_1} f(x_i, y)\,dy\right|<h\varepsilon \tag{4}$$

但是因爲

$$m_1 \leqslant \varphi_1(x_i) \leqslant M_1, \quad m_2 \leqslant \varphi_2(x_i) \leqslant M_2,$$

所以，從不等式(3)立刻知道

$$\varphi_1(x_i) - m_1 < \frac{\delta}{2}, \quad M_2 - \varphi_2(x_i) < \frac{\delta}{2},$$

因而

$$\left| \int_{\varphi_2(x_i)}^{\varphi_1(x_i)} f(x_i, y)\, dy - \int_{M_2}^{m_1} f(x_i, y)\, dy \right| =$$

$$= \left| \int_{\varphi_2(x_i)}^{M_2} f(x_i, y)\, dy + \int_{m_1}^{\varphi_1(x_i)} f(x_i, y)\, dy \right| < 2\mu \frac{\delta}{2} = \mu\delta,$$

其中 μ 是函數 $|f(x, y)|$ 在區域 $\mathscr{D}$ 上的上確界。因此，從(4)就推出

$$\left| \sum_{l=0}^{m-1} f(x_i, y_l) h h' - h \int_{\varphi_2(x_i)}^{\varphi_1(x_i)} f(x_i, y)\, dy \right| < h\varepsilon + h\mu\delta < 2h\varepsilon,$$

因爲我們不妨在一開始就取 $\delta < \frac{\varepsilon}{\mu}$。

到現在爲止，我們只討論了牽涉到我們選定的**一個**豎長條的全部矩形小區域的那一部分積分和。按照所有這種長條把得到的結果加在一起，我們就有：

$$\left| \sum\nolimits_1 f(\xi_k, \eta_k) \Delta_k - h \sum_{i=0}^{n-1} \int_{\varphi_2(x_i)}^{\varphi_1(x_i)} f(x_i, y)\, dy \right| < 2h\varepsilon n = 2\varepsilon(b-a),$$

其中和數 Σ_1 牽涉到分法 T 的全部在 $\mathscr{D}$ 裏邊的小區域以及某些在 $\mathscr{D}$ 邊上的小區域。

現在令

$$\int_{\varphi_2(x)}^{\varphi_1(x)} f(x, y) dy = F(x), \qquad (a \leqslant x \leqslant b),$$

於是 $F(x)$ 是區間 (a, b) 上的 x 的一個連續函數(參看 § 109 的定理 4)。

於是上面最後一個不等式可以寫成

$$\left|\sum_1 f(\xi_k,\eta_k)\Delta_k-\sum_{i=0}^{n-1}F(x_i)(x_{i+1}-x_i)\right|<2\varepsilon(b-a).$$

但是,當 $h\to 0$ 時,和數

$$\sum_{i=0}^{n-1}F(x_i)(x_{i+1}-x_i)\to\int_a^b F(x)\,dx;$$

所以,我們可以在一開始就把 h 取得這樣小,使得這個和數與積分

$$\int_a^b F(x)\,dx=\int_a^b\left\{\int_{\varphi_2(x)}^{\varphi_1(x)}f(x,y)\,dy\right\}dx$$

之差小於 ε。於是,上述不等式給出:

$$\left|\sum_1 f(\xi_k,\eta_k)\Delta_k-\int_a^b F(x)\,dx\right|<\varepsilon[1+2(b-a)].\qquad(5)$$

最後,我們還知道,由於分法 T 的一切小區域的直徑都小於 δ,所以不等式(1)也成立。但是,從(1)與(5)立刻得出

$$\left|I-\int_a^b F(x)\,dx\right|<2\varepsilon(1+b-a).$$

因為 ε 可以任意小,而這個不等式的左端卻與 ε 無關,所以左端必然等於零,因而我們得到:

$$\iint_{\mathscr{D}} f(x,y)\,dx\,dy=\int_a^b\left\{\int_{\varphi_2(x)}^{\varphi_1(x)}f(x,y)\,dy\right\}dx.\qquad(6)$$

這個結果正是我們論證的目的。我們從這裏就看到了,連續函數的二重積分可以利用連續兩次的簡單(一重)積分來計算。在公式(6)的右端,裏邊的一個積分是我們在 §109 已經遇到過的:變量 x 在這個積分中起着參變量的作用,換句話說,在進行積分運算時,它保持固

定的值。在這個積分中不僅被積函數與這個參變量 x 有關，而且它的兩個積分限也都與它有關。因此，這整個裏邊的積分是變量 x 的一個連續函數，然後應該再把這個函數按照積分限從 a 到 b 對 x 進行積分。

在我們以上的整個討論中，座標 x 與 y 自然是完全對稱的，因而，如果為了某種方便，我們儘可以先對 x 然後再對 y 積分；為此，我們需要在區域 $\mathscr{D}$ 的邊界上，標出相當於縱座標 y 取最小值 $y=c$ 與最大值 $y=d$ 的點；這兩個點把邊界分成兩部分——右邊的部分的方程是 $x=\psi_1(y)$，左邊部分的方程是 $x=\psi_2(y)$。於是，跟前面完全一樣，我們可以得到：

$$\iint_{\mathscr{D}} f(x, y)\, dx\, dy = \int_c^d \left\{ \int_{\psi_2(y)}^{\psi_1(y)} f(x, y)\, dx \right\} dy. \tag{7}$$

當然，要真正計算這兩個簡單積分並不見得永遠是很容易的。不過，在原則上我們已經把二重積分的計算問題化成了我們早已詳細討論過的簡單積分的計算問題，因而可以認為我們的目的已經達到。還要指出，既然可以用兩個等價的公式(6)與(7)來解決我們的問題，我們當然可以在不同的情況下，從它們中間選用那用起來比較方便的一個；這一方面要看函數 $f(x, y)$ 的性質如何，同時還要看區域 $\mathscr{D}$ 的形狀怎樣。

例. 有一個母線平行於 OZ 軸的三稜柱，它的底是平面 XOY 上以 $A(0,1)$, $B(1,0)$, $C(-1,0)$ 為頂點的三角形。試求這個三稜柱介於平面 XOY 與旋轉拋物面 $Z=x^2+y^2$ 之間的那一部分的體積（圖 78）。

很明顯，我們是在考慮一個 § 115 中所說的那種柱體。這裏，圖 79 所示的三稜柱的底 ABC 就是我們的區域 $\mathscr{D}$。直線 AC 與 AB 的方程分別是

$$x=y-1, \qquad x=1-y;$$

所以，我們要求的體積就是

$$V=\iint_{\mathscr{D}} (x^2+y^2)dx\ dy=\int_0^1 \left\{ \int_{y-1}^{1-y} (x^2+y^2)\, dx \right\} dy.$$

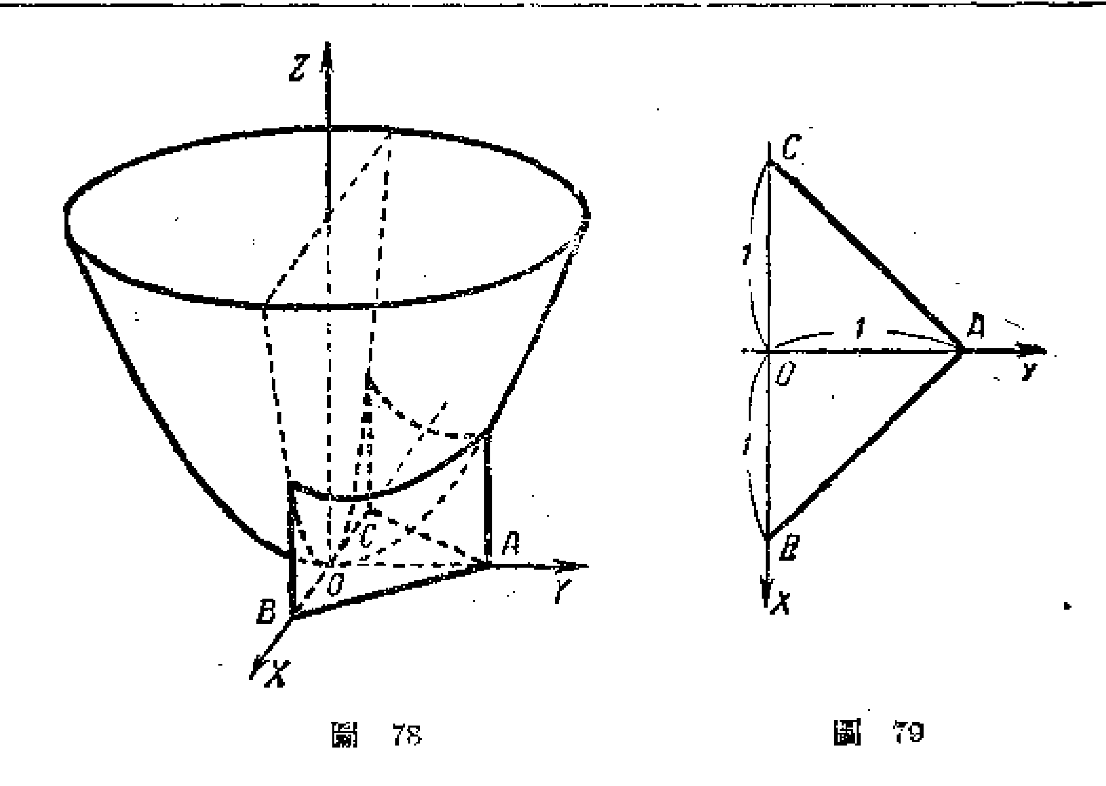


圖 78　　　　圖 79

這裏，裏邊的積分

$$\int_{y-1}^{1-y}(x^2+y^2)\,dx=\left[y^2x+\frac{x^3}{3}\right]_{y-1}^{1-y}=2y^2(1-y)+\frac{2}{3}(1-y)^3,$$

所以我們得到：

$$V=\int_0^1\left\{2y^2(1-y)+\frac{2}{3}(1-y)^3\right\}dy.$$

以下的計算顯然沒有什麼困難。

另外一些很好的練習可以參看 Б. П. 捷米多維奇的習題集，第八章，習題 7—15，17，23。

§ 118. 二重積分的變量替換

我們知道，積分變量的替換是一個怎樣強有力的計算簡單(一重)積分的方法(比如說，只要回想一下我們在第十七章中，用包括許多整類函數關係的大量例子來說明的，把無理函數與超越函數的積分有理

化的方法就够了)。在選擇要用的替換時,有着很大的隨意性，我們在大多數情況下，總是設法利用這個辦法把被積表達式變換成比較容易進行積分的形式。

現在擺在我們面前的，是要對二重積分提供類似的辦法。我們就會看到，在這裏也常常是簡單的積分變量替換就可以使得積分大大地變得易於計算或估值。

假定給定了一個二重積分

$$\iint\limits_{\mathscr{D}} f(x, y)\, dx\, dy, \tag{1}$$

其中,函數 $f(x, y)$在閉區域 $\mathscr{D}$ 上連續。

除平面 xy 外,我們同時考慮平面 uv, 以及在這個平面上的某一個區域 $\mathscr{D}'$。假定變量替換

$$x = x(u, v), \qquad y = y(u, v), \tag{2}$$

把區域 $\mathscr{D}'$ 變換成平面 xy 上的區域 $\mathscr{D}$ (就像 § 105 中我們詳細討論過的那樣); 其中,函數 $x(u, v)$, $y(u, v)$都確定在區域 $\mathscr{D}'$ 上，並且在 $\mathscr{D}'$ 上連續而且具有連續的偏導數。我們假定把區域 $\mathscr{D}'$ 變換成 $\mathscr{D}$ 的對應關係(2)是一對一的,換句話說,區域 $\mathscr{D}$ 的每個點(x, y) 只能是區域 $\mathscr{D}'$的一個點(u, v)的“像”;這個點(u, v)由“逆”變換

$$u = u(x, y), \qquad v = v(x, y) \tag{3}$$

唯一決定,對於這個變換,我們也假定函數 $u(x, y)$ 與 $v(x, y)$都在區域 $\mathscr{D}$ 上連續並且具有連續的偏導數。因爲這時(見 § 105)

$$\frac{D(u, v)}{D(x, y)} \cdot \frac{D(x, y)}{D(u, v)} = 1,$$

所以這兩個行列式在相應的區域上都不等於零。我們的目的是要把展佈在 xy 平面的區域 $\mathscr{D}$ 上的積分 (1)，表示成展佈在 uv 平面的區域 $\mathscr{D}'$ 上的一個二重積分。

爲了這個目的，我們來考慮由兩組分別平行於軸 OX 與 OY 的直

線構成的區域$\mathscr{D}$的一個分法T；其中，我們假定兩組直線的每兩個相鄰的平行線間的距離都是h，於是分法T在$\mathscr{D}$裏邊的小區域都是邊長h的方塊。對應於$\mathscr{D}$的這個分法T，區域$\mathscr{D}'$得到一個確定的分法T'，一般來說，T'的小區域具有彎曲的邊界。在分法T中隨便取一個在$\mathscr{D}$裏邊的小區域（方塊）Δ_k，這個方塊的頂點是(x_k, y_k)，(x_k+h, y_k)，(x_k, y_k+h)，(x_k+h, y_k+h)；變換(3)把這個方塊變換成（區域$\mathscr{D}'$的）分法T'的某一個相應的小區域。首先，我們要說明每一個這種小區域都是一個可測圖形。

小區域Δ_k'的邊界自然地分成了分別與方塊Δ_k的四邊相應的四個部分❶。我們來考慮這四部分中的任何一部分，比如說，與方塊Δ_k的邊$x_k \leqslant x \leqslant x_k+h$，$y=y_k$相應的那一部分。這部分顯然可以表作參變方程

$$u=u(x, y_k), \quad v=v(x, y_k), \quad (x_k \leqslant x \leqslant x_k+h),$$

這裏，函數u, v的導數$\frac{\partial u}{\partial x}$與$\frac{\partial v}{\partial x}$還都在區間$(x_k, x_k+h)$上連續，並且不同時為零（因為，否則行列式$\frac{D(u, v)}{D(x, y)}$就要等於零，而我們知道這是不行的）。很明顯，對於小區域Δ_k'的邊界的其他三部分中的任何一個，我們也都可以作出同樣的結論，因此，根據§114的定理7，小區域Δ_k'是一個可測圖形。

在§105中我們已經知道，當$h \to 0$時，小區域的面積之比$\frac{\Delta_k'}{\Delta_k}$以行列式

$$\frac{D(u, v)}{D(x, y)}$$

在點(x_k, y_k)的絕對值作為極限；因此，當$h \to 0$時

$$\Delta_k' = \left|\frac{D(u, v)}{D(x, y)}\right| \Delta_k + o(\Delta_k).$$

---

❶ 作為這裏以及今後我們論證的嚴格基礎，我們事實上還應該證明，當一個區域變成另一個區域的變換是一對一的，而且正逆變換都連續時，第一個區域的邊界一定變成第二個的邊界。這個命題的確是對的，不過它的證明已經超出了本書的範圍。

由此,反過來,

$$\Delta_k=\left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right|\Delta_k'+\alpha_k\Delta_k, \tag{4}$$

這裏,當 $h\to 0$ 時 $\alpha_k\to 0$, 又奧斯特洛格拉得斯基行列式應該在小區域 Δ_k' 的點 $[u_k=u(x_k,y_k),\ v_k=v(x_k,y_k)]$ 取値。現在我們把等式(4)遍乘以 $f(x_k,y_k)$, 然後按所有在區域 $\mathscr{D}$ 裏邊的小區域一齊加起來,就得到:

$$\sum_1 f(x_k,y_k)\Delta_k=$$

$$=\sum_1 f(x_k,y_k)\left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right|\Delta_k'+\sum_1 f(x_k,y_k)\alpha_k\Delta_k. \tag{5}$$

現在我們讓 h 無限制地減小,因而分法 T 的小區域 Δ_k 的最大直徑 $h\sqrt{2}$ 也無限制地減小。根據 § 116 的最後一個定理,這時等式(5)的左端以積分(1)爲極限。我們再轉過來研究一下等式的右端,先從它的第二項開始。在 § 105 我們已經知道,當 $h\to 0$ 時,數 α_k 對於方塊 Δ_k 在區域 $\mathscr{D}$ 上的位置來說,一致地趨向於零;因此,不管 $\varepsilon>0$ 是怎麼樣的一個數,只要 h 充分地小,在和數 $\sum_1 f(x_k,y_k)\alpha_k\Delta_k$ 的每一項中,我們都有 $|\alpha_k|<\varepsilon$, 由此可見,只要 h 充分小,就有:

$$\left|\sum_1 f(x_k,y_k)\alpha_k\Delta_k\right|<\varepsilon\sum_1\left|f(x_k,y_k)\right|\Delta_k\leqslant\mu\varepsilon D,$$

其中,μ 是函數 $|f(x,y)|$ 在區域 $\mathscr{D}$ 上的上確界。因爲 ε 可以任意小,所以當 $h\to 0$ 時,

$$\lim\sum_1 f(x_k,y_k)\alpha_k\Delta_k=0.$$

最後,我們來考慮等式(5)右端的第一個和數。爲簡單起見,我們令

$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)}=J(u,v),$$

由於

$$x_k=x(u_k,v_k),\qquad y_k=y(u_k,v_k),$$

我們可以把上述和數寫成

$$\sum_1 f[x(u_k,v_k),y(u_k,v_k)]\,|J(u_k,v_k)|\,\Delta_k', \tag{6}$$

這裏符號 Σ_1 表示求和只牽涉到區域 $\mathscr{D}'$ 的所有那些跟區域 $\mathscr{D}$ 裏邊的小區域 Δ_k 相應的小區域 Δ_k'。但是經過變換(3)，區域 $\mathscr{D}$ 的邊界變成了區域 $\mathscr{D}'$ 的邊界，反之也對(參看第 592 頁的脚註)。由此可見，在一個區域裏邊的小區域應該對應於在另一個區域裏邊的小區域，在邊上的小區域同樣應該對應於在邊上的小區域。和數(6)牽涉到區域 $\mathscr{D}'$ 的所有那些跟區域 $\mathscr{D}$ 裏邊的小區域相應的小區域，實際上也就是牽涉到所有在區域 $\mathscr{D}'$ 裏邊的小區域。當 $h\to 0$ 時，這些小區域的最大直徑（由於函數 $u(x,y), v(x,y)$ 的一致連續性）趨向於零，因而根據 § 116 的最後一個定理，和數(6)以二重積分❶

$$\iint\limits_{\mathscr{D}'} f[x(u,v),y(u,v)]|J(u,v)|\,du\,dv \tag{7}$$

為極限。

這樣一來，回到關係式(5)，並且在那兒讓 $h\to 0$ 取極限，我們就導出公式：

$$\iint\limits_{\mathscr{D}} f(x,y)\,dx\,dy=\iint\limits_{\mathscr{D}'} f[x(u,v),y(u,v)]|J(u,v)|\,du\,dv, \tag{8}$$

其中

$$J(u,v)=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v}\\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}$$

又 $\mathscr{D}'$ 是平面 uv 上的一個區域，它在變換 $x=x(u,v), y=y(u,v)$ 之下變成 xy 平面上的區域 $\mathscr{D}$。這就是我們想要得到的二重積分的變量替換公式。我們看到，它和簡單(一重)積分的相應的變量替換公式

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt$$

❶ 我們在此地略去了證明區域 $\mathscr{D}'$ 與區域 $\mathscr{D}$ 一樣的也是可測圖形。

(這裏，區間 $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$ 經過變換 $x=\varphi(t)$ 變成區間 $a \leqslant x \leqslant b$) 完全相仿。行列式 J——說得更精確一些，它的絕對値——在公式(8)中起着導數 $\varphi'(t)$ 的作用。跟單積分的情形一樣，公式 (8) 的主要作用是把積分變換成比較便於計算或估計的形式；但是，這裏還多出了某種在單積分的情形所缺乏的新東西：使用公式(8)的主要目的已經常常不只是要把被積函數變得簡單，而是要把積分區域的形狀也變得簡單；如果區域 $\mathscr{D}'$ 比區域 $\mathscr{D}$ 具有更簡單的形狀，則積分在本質上就化簡了，而這種化簡是這樣的重要，有時爲了要實現這種化簡，甚至把被積函數變得更加複雜也還是合算的。

例. 最常見的一種二重積分的變量替換，就是從直角座標 (x, y) 變到極座標(r, φ)；變換公式在最簡單的情形下是

$$x=r \cos \varphi, \qquad y=r \sin \varphi,$$

從而

$$J=\frac{D(x, y)}{D(r, \varphi)}=\begin{vmatrix}\cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi\end{vmatrix}=r.$$

一般公式就成爲

$$\iint_{\mathscr{D}} f(x, y)\, dx\, dy=\iint_{\mathscr{D}'} f[r \cos \varphi, r \sin \varphi] r\, dr\, d\varphi. \tag{9}$$

在我們常常遇到的，區域 $\mathscr{D}$ 是一個以座標原點爲中心的圓

$$x^2+y^2 \leqslant a^2 \tag{10}$$

的情形，這個公式應用起來特別方便；這時，區域 $\mathscr{D}'$ 顯然是矩形 $0 \leqslant r \leqslant a,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$。在矩形上進行積分自然要比在圓上進行積分簡單得多；我們在 § 117 討論過的把二重積分化成連續兩次簡單積分的公式，在圓(變量 x, y)的情形，給出積分限

$$\int_{-a}^{a} \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}};$$

而在矩形(變量 r,φ)的情形，則積分限都是常數：

$$\int_0^a\int_0^{2\pi},$$

這在很多問題上都使得計算簡單得多❶。

例如，假定需要計算積分

$$I=\iint_{\mathscr{D}} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy,$$

其中，$\mathscr{D}$ 是圓(10)。公式(9)給出：

$$I=\iint_{\mathscr{D}'} e^{-r^2}r\,dr\,d\varphi,$$

其中，$\mathscr{D}'$ 是矩形 $0\leqslant r\leqslant a,\ 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$。因此，根據 § 117 的結果

$$I=\int_0^{2\pi}\left\{\int_0^a re^{-r^2}\,dr\right\}d\varphi=2\pi\int_0^a re^{-r^2}\,dr=$$

$$=2\pi\left(-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right)\Big|_0^a=\pi(1-e^{-a^2}).$$

假定讀者試着在直角座標的情形來計算一下這一個積分，就會發現，在這方面會碰到很大的困難。

進一步的練習可以參看 Б. П. 捷米多維奇的習題集，第八章，習題 34—36，39，40，47，49，51，53，54，86，87。

§ 119. 三重積分

在整個前面這幾節中，我們看到從簡單積分到二重積分，儘管是那樣的類似，但畢竟還是有必要對積分區域做更詳細的探討——我們不得不立脚於平面圖形的測度的一般理論之上。建立這樣一套像我們在

❶ 這裏，奥斯特洛格拉得斯基行列式在圓心等於零，但是，我們可以證明，這種情況，並不妨礙我們應用公式(9)。

§ 114 中引進的理論，要求我們一定程度的努力工作；不過，這一番努力倒是大大地上算的，它使得我們後來建立的二重積分理論不僅簡明而且嚴格，此外更大的收穫，還在於我們幾乎不必做任何更動，就可以把整個 § 114 搬到任何維的空間的集合的測度上去，因而，我們在那裏建立的理論就可以作爲任意重數的重積分的理論基礎。

要想建立三維空間中的集合的測度理論，我們需要一步一步地來考察 § 114 中的那些定義與結論；這時，必要的更動就只是一些理所當然的替換，比如說，把直線網換成平面網，平行四邊形換成平行六面體，圓換成球等等；§ 114 的絕大多數結論不必做任何更動就照樣成立。

假定 $\mathscr{V}$ 是三維空間中的任何一個有界的可測集合，$f(x, y, z)$ 是確定在區域 $\mathscr{V}$ 上的一個函數，我們把牽涉到區域 $\mathscr{V}$ 的分法 T 的一切小區域 Δ_k 的和數

$$\sum f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\Delta_k$$

(其中，(ξ_k, η_k, ζ_k) 是 Δ_k 上的任意一點)的極限叫做函數 $f(x, y, z)$ 展佈在區域 $\mathscr{V}$ 上的三重積分，記作

$$\iiint_{\mathscr{V}} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz;$$

這裏所說的極限是在分法 T 的小區域的最大直徑趨向於零的條件下取的，因而它應該既不依賴於任意的分法 T，也不依賴於在這些分法的小區域上怎樣選取點 (ξ_k, η_k, ζ_k)。

§ 116 的全部內容不需要任何更動就可以搬到三重積分來。跟我們在 § 117 中對二重積分所做的一樣，在實際上三重積分的計算（或估計）多半可以用把三重積分化成連續三次簡單(一重）積分的辦法來進行。對於形狀相當簡單的區域，我們有：

$$\iiint_{\mathscr{V}} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \int_a^b \left\{ \int_{\varphi_2(x)}^{\varphi_1(x)} \left[\int_{\psi_2(x, y)}^{\psi_1(x, y)} f(x, y, z) dz \right] dy \right\} dx. \quad (1)$$

這裏，最裏邊的一個積分是對 z 取的，而 x 與 y 都算作是參變量；這個積分的上下限分別是對於給定的 x 與 y，z 在區域 $\mathscr{V}$ 上的數值的上確界與下確界；因此，(在方括號內的)最裏邊的一個積分就是 x 與 y 的一個函數；再把這個函數對 y 取積分，而 x 仍舊看作是參變量；這個積分的上下限又分別是對於給定的 x 量 y 在區域 $\mathscr{V}$ 上的上確界 $\varphi_1(x)$ 與下確界 $\varphi_2(x)$；這(在花括號之內的)第二個積分自然是 x 的一個函數；最後(第三次積分)，再把這個函數對 x 進行積分，這時積分的上下限就是在整個區域 $\mathscr{V}$ 上 x 的上確界與下確界了。

當然，我們所選擇的積分次序可以換成任何一個其他的次序(積分限要作相應的改變)，而且這種選擇積分次序的自由，在不同的情形下，正好可以用來選擇一個最方便的運算次序。

如果把公式(1)的右端的最裏邊的一個積分記作 $\Phi(x, y)$，則整個右端成爲

$$\int_a^b \left\{ \int_{\varphi_2(x)}^{\varphi_1(x)} \Phi(x, y)\, dy \right\} dx,$$

根據 § 117，它等於

$$\iint_{\mathscr{D}} \Phi(x, y)\, dx\, dy,$$

其中 $\mathscr{D}$ 是空間區域 $\mathscr{V}$ 在平面 XOY 上的投影。因此，公式(1)給出：

$$\iiint_{\mathscr{V}} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \iint_{\mathscr{D}} \left\{ \int_{\psi_2(x,y)}^{\psi_1(x,y)} f(x, y, z)\, dz \right\} dx\, dy. \quad (2)$$

於是我們又看到，三重積分也可以化成連續進行一次簡單積分與一次二重積分。

要想能夠根據所給的積分區域 $\mathscr{V}$ 的幾何形狀，很快地確定出公式(1)右端的三個簡單積分的一切積分限，以及爲了解決相反的問題——根據所給的簡單積分的積分限來很快確定區域 $\mathscr{V}$ 的形狀——都要求

我們做大量的練習。因此，許多好的習題集在積分計算方面都收集了大量的這種例題，這種例題有一個獨特之處，那就是在求解的時候，不僅不需要進行任何積分，甚至連被積函數的形狀都可以不必知道。

最後，對於三重積分，我們也有與 § 118 的公式 (8) 相似的變量替換的公式。如果變換

$$u=u(x, y, z), \quad v=v(x, y, z), \quad w=w(x, y, z) \tag{3}$$

把空間 xyz 的區域 $\mathscr{V}$ 一對一地變換成空間 uvw 的區域 $\mathscr{V}'$，則在滿足通常的關於連續性的要求以及條件 $J\neq 0$ 的情形下，我們有：

$$\iiint_{\mathscr{V}} f(x, y, z)dx\,dy\,dz=$$

$$=\iiint_{\mathscr{V}'} f[x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)]\,|J|\,du\,dv\,dw,$$

其中

$$J=\frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)}=\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

是變換(3)的逆變換

$$x=x(u, v, w), \quad y=y(u, v, w), \quad z=z(u, v, w)$$

的奧斯特洛格拉得斯基行列式。這個公式的證明（我們不能在這裏談了）可以完全仿照 § 118 中公式(8)的證明來進行，只要我們預先證明在三維的情形（跟二維的情形一樣），奧斯特洛格拉得斯基行列式的絕對值，在變換空間的一個無窮小的範圍內，也可以幾何地解釋作一種特殊的"擴張係數"。

跟二維的情形一樣，最常見的一種三重積分的變量替換是把直角座標變成球座標：

$$x=r\cos\varphi\cos\psi,$$

$$y=r\cos\varphi\sin\psi,$$
$$z=r\sin\varphi,$$

其中 $$0\leqslant r<+\infty,\quad -\frac{\pi}{2}\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2},\quad 0\leqslant\psi\leqslant 2\pi.$$

我們不難求出：

$$\left|\frac{D(x,y,z)}{D(r,\varphi,\psi)}\right|=r^2\cos\varphi,$$

於是變換公式成爲

$$\iiint\limits_{\mathscr{V}} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz=$$
$$=\iiint\limits_{\mathscr{V}'} f(r\cos\varphi\cos\psi,r\cos\varphi\sin\psi,r\sin\varphi)r^2\cos\varphi\,dr\,d\varphi\,d\psi.$$

當原來的積分以球

$$x^2+y^2+z^2\leqslant a^2$$

作爲它的積分區域時，這個變換常常顯得特別方便；在這個時候，區域 $\mathscr{V}'$ 顯然是長方體 $0\leqslant r\leqslant a$, $-\frac{\pi}{2}\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}$, $0\leqslant\psi\leqslant 2\pi$。

關於 § 119 的練習可以參看 Б. П. 捷米多維奇的習題集，第八章，習題 148—150,158,159。

§ 120. 應用

在本節中，我們要簡略地考慮一下二重與三重積分在幾何以及靜力學上的某些應用。

1. 曲面面積 關於任意曲面的面積問題僅僅在不多的幾種特殊情況下，才可以用初等幾何的方法來解決。問題的一般提法要求使用積分計算的方法。我們就會看到，在解決這個問題時，二重積分起着類似於簡單積分在解決曲線的弧長問題（§ 52）時所起的那種作用。

假定我們有一塊曲面，它與某一個給定的方向上的任何一條直線相交都不多於一點，我們把這個方向就取做 OZ 軸。於是這塊曲面的

方程就是

$$z=f(x, y) \tag{1}$$

的形式，這裏，我們假定函數 $f(x, y)$ 連續，並且具有對 x 與 y 的連續偏導數。假定給定的這一塊曲面 (1) 在平面 XOY 上的投影是某一個可測圖形 $\mathscr{D}$。

我們知道(§ 99)，在我們對函數 $f(x, y)$ 所做的假定之下，這塊曲面在它的每一點處都有切面與法線；如果我們用 γ 來表示這個法線與 OZ 軸間夾成的銳角，則

$$\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}}. \tag{2}$$

我們的問題，跟通常數學分析在幾何上的應用一樣，首先在於要確定所謂一塊曲面的面積這個概念本身，然後還要提供出一個計算這個面積的方法。爲了這個目的，我們從區域 $\mathscr{D}$ 的任意分法 T 着手，這個分法把 $\mathscr{D}$ 分成一些小區域 Δ_k，對於這些小區域，我們僅僅提出通常的一般要求：每個小區域都必須是可測圖形，並且兩個不同的小區域不能有公共內點。在每個小區域 Δ_k 上，我們任意取一點 (ξ_k, η_k)，然後通過這一點引一條垂直於平面 XOY 的直線，這條垂線與曲面(1)相交於點 $M_k(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)$，其中 $\zeta_k=f(\xi_k, \eta_k)$。在這個點 M_k 作曲面 (1) 的切面。在點 M_k 附近，這個切面與曲面(1)本身非常逼近；從直覺上看來，如果小區域 Δ_k 的直徑很小，則曲面(1)上投影成 Δ_k 的那一塊的測度 s_k 應該非常接近於我們所做的切面上投影成這同一個小區域的那一塊的測度 σ_k。把對於所有這些小區域 Δ_k 的近似等式全都加起來，我們就得出這樣一個結論：當小區域的直徑都很小時，自然我們可以認爲我們感興趣的那一塊曲面(1)的測度(面積)非常接近於和數

$$\sum_k \sigma_k \tag{3}$$

(曲面塊(1)的測度等於$\sum\limits_k s_k$)。因此,如果當這些小區域的直徑無限縮小時,這個和數趨向於一個極限,那麼我們很自然地就把這個極限取來做爲我們所考慮的那塊曲面(1)的測度(面積)。

現在我們來證明,在我們的假設之下,當分法T無限變細時,和數(3)的極限的確存在,並且與所用的分法以及從小區域Δ_k上所選擇的點(ξ_k,η_k)都無關。爲此,讓我們回想一下量σ_k究竟是什麼。我們是在小區域Δ_k上任意取的一點(ξ_k,η_k),然後令$f(\xi_k,\eta_k)=\zeta_k$,然後我們再從曲面(1)的點$M_k(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)$作這個曲面的切面的;根據剛才的說法,$\sigma_k$是這個切面上以小區域$\Delta_k$作爲它在平面$XOY$上的投影的那一塊的測度。因爲這兩個平面之間的夾角顯然就是我們在上面所說的角γ,所以根據通常關於被投影圖形的面積與它的投影的面積之間的關係❶,我們有

$$\Delta_k=\sigma_k\cos\gamma,$$

其中γ自然是對點M_k取的;於是根據(2)

$$\sigma_k=\frac{\Delta_k}{\cos\gamma}=\sqrt{1+f_x'^2(\xi_k,\eta_k)+f_y'^2(\xi_k,\eta_k)}\,\Delta_k.$$

從而,

$$\sum_k\sigma_k=\sum_k\sqrt{1+f_x'^2(\xi_k,\eta_k)+f_y'^2(\xi_k,\eta_k)}\,\Delta_k.$$

然而,這正好就是我們在§116中考慮過的那種形狀的一個和數;從我們對函數$\frac{\partial f}{\partial x}$與$\frac{\partial f}{\partial y}$所做的連續性的假定,根據§116的結果立刻就知

❶ "投影的面積等於被投影圖形的面積乘上包含它們的平面之間的夾角的餘弦"。這條規則曾經在初等幾何裏對於在它的範圍之內能夠定義面積的那些圖形證明過了。我們現在是要把這條規則應用到較一般的情形。實際上,我們可以依據下述命題:"如果一個給定的圖形的投影是可測的,則這個圖形本身也是可測的,並且投影的測度等於被投影圖形的測度乘上包含它們的平面之間的夾角的餘弦"。這個一般規則不難從上面所說的初等幾何的規則推出來,不過,我們現在不能再詳細地討論這個問題了。

道，當分法T無限變細時，這個和數以二重積分

$$S=\iint_{\mathscr{D}}\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy \tag{4}$$

爲極限，根據我們所採用的定義，我們當然應該承認這就是我們關心的那一塊曲面(1)的面積S的表達式。從二重積分的一般理論(§116)同時推出我們所得到的極限與某些組成它的因素分法T的選擇以及在小區域內點(ξ_k, η_k)的選擇)的無關性。

把公式(4)與平面曲線$y=f(x)$介於$x=a$與$x=b$之間的弧長L的表達式

$$L=\int_a^b\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$

比較一下，看一看這兩個公式相似到一個什麼程度，是一件很有意思的事情。

例．求以a爲半徑的球S的表面積。把直角座標系的原點取在球的中心，於是上半球的方程就是

$$z=\sqrt{a^2-x^2-y^2},$$

我們把赤道圍成的圓$x^2+y^2\leqslant a^2$取作區域$\mathscr{D}$。不難求出：

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}},\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}},$$

從而

$$1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2=\frac{a^2}{a^2-x^2-y^2},$$

因而公式(4)給出上半球的面積：

$$\frac{S}{2}=a\iint_{x^2+y^2\leqslant a^2}\frac{dx\,dy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}},$$

或者，化成極坐標$(x=r\cos\varphi,\ y=r\sin\varphi)$,

$$\frac{S}{2}=a\int_{0}^{2\pi}d\varphi\int_{0}^{a}\frac{r\,dr}{\sqrt{a^2-r^2}}=2\pi a\int_{0}^{a}\frac{r\,dr}{\sqrt{a^2-r^2}}=2\pi a\left(\sqrt{a^2-r^2}\right)\Big|_{a}^{0}=2\pi a^2,$$

$$S=4\pi a^2.$$

這正是初等幾何中大家熟知的公式。

進一步的練習可以參看 Б. П. 捷米多維奇的習題集，第八章，習題 107，109，110，118。

我們以上建立的曲面面積的定義的缺點，是它與座標系的選擇有關(另外一個說法，與給定的曲面投影到的那個平面的選擇有關)。可以直接證明這種依賴關係僅僅是表面上的(換句話說，在任何其他方向投影，只要每一條投射的直線依然與給定的那塊曲面相交不多於一點，面積就還是一樣)；也可以把我們所給的定義換成其他比較複雜的定義，使得一般來說，面積不再依賴於什麼不確定的東西。不過，上述兩個辦法都過於複雜，以致我們在這裏不可能來談論它們。

如果我們要計算面積的那塊曲面，在不論怎樣選擇座標軸時，都不能使得它的點的座標之一表成它的點的其他兩個座標的單值函數（譬如說，任何一個閉曲面就是這樣），則我們通常都可以把這塊曲面分成有限個部分，使得每一部分都可以這樣表達(這時，一般來說，對於不同的部分必須取不同的投影方向)。在這種情形下，我們就認為整塊給定的曲面的面積就等於組成它的那些"比較簡單的"部分的面積之和。

2. **展佈在一塊曲面上的積分** 在 §52 中，當我們建立了曲線弧長的定義之後，就引進了"沿着給定的一段曲線的積分"的概念。既然現在我們已經建立了一塊曲面面積的定義，我們也就可以用類似的方式來引進"展佈在給定的一塊曲面上的二重積分"的概念了，這個概念是通常展佈在這個或那個平面區域上的二重積分的一個自然的推廣。

假定$\mathscr{S}$是我們在第一段末尾所考慮的那種類型的一塊曲面，又假定 $F(x,y,z)$ 是在某一個把$\mathscr{S}$包含在它的內部的空間區域上的一個連

續函數。把$\mathscr{S}$任意地分成若干部分("小塊")，每一個小塊都具有確定的面積，又在每一個小塊σ_k上任意取一點(x_k, y_k, z_k)。如果和數

$$\sum_k F(x_k, y_k, z_k)\sigma_k$$

當分法無限變細時(換句話說，當這些小塊的最大直徑趨向於零時)趨向於一個確定的極限，而且這個極限既跟所用的$\mathscr{S}$的分法無關，也跟點(x_k, y_k, z_k)的取法無關，則我們就把這個極限叫做**函數$F(x, y, z)$展佈在給定的這塊曲面$\mathscr{S}$上的二重積分**，並且記作

$$\iint_{\mathscr{S}} F(x, y, z)\, d\sigma.$$

用這種方式引進的概念可以有許多的應用，這些應用與沿曲線段的積分的應用相似。在§54中，我們曾經利用沿曲線段的積分來表達已知在各點的密度的物質曲線的質量。用完全類似的辦法可以解決物質曲面的質量以及電荷等等問題。例如，我們來考慮一個帶電的導體，假定電荷按照(面)密度$\rho(x, y, z)$分佈在它的表面上。於是讀者不難自己證明，這塊曲面$\mathscr{S}$所帶有的總電荷等於

$$\iint_{\mathscr{S}} \rho(x, y, z)\, d\sigma.$$

3. 非均勻物體的質量　作為三重積分的應用的一個最簡單的例子，我們來考慮根據非均勻物體的密度來確定它的質量的問題。如果給定的物體是均勻的，換句話說，它的密度ρ在每一點都一樣，則這個物體的質量M就等於密度ρ乘上它的體積V。如果物體是非均勻的，則它在不同的點有不同的密度$\rho=\rho(x, y, z)$。把給定的物體任意地分成許多小塊Δ_k，又假定$d(T)$是這個分法T的那些小塊的最大直徑。隨便取一個小塊Δ_k，在它上面隨便取一點(ξ_k, η_k, ζ_k)。我們假定函數$\rho(x, y, z)$在給定的物體的範圍內是連續的。如果小塊Δ_k的直徑很小，

則在不同的點處密度的值 ρ 彼此很相近，因此，特別是與 $\rho(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)$ 很相近。所以很自然地我們認爲小塊 Δ_k 的質量非常接近於把它看作好像是一個以 $\rho(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)$ 爲密度的均勻物體時的質量，換句話說 Δ_k 的質量差不多就是

$$\rho(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\Delta_k;$$

因而，整個物體的質量就與(牽涉到所有小塊的)和數

$$\sum_k \rho(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\Delta_k$$

非常相近。但是，我們在 § 119 中已經看到，這個和數當 $d(T)\to 0$ 時趨向於一個確定的極限，我們把它記作

$$\iiint_{\mathscr{V}} \rho(x, y, z)dx\,dy\,dz,$$

其中 $\mathscr{V}$ 是給定的物體在三維空間中所佔據的區域。我們很自然地就把這個極限取來作爲給定的物體的質量 M 的表達式：

$$M = \iiint_{\mathscr{V}} \rho(x, y, z)\,dx\,dy\,dz.$$

4. **物體的重心座標與轉動慣量。** 利用二重積分不難解決確定平面薄片的重心座標以及它的轉動慣量的問題，而三重積分則可以對空間的物體來解決這些同樣的問題。我們只限於討論空間物體的情形，因爲對平面薄片來說，一切推理與結論都與我們在三維的情形所作的完全類似。

我們仍然把物體分成許多直徑很小的小塊，並且在每一個小塊 Δ_k 上任意取一點 (ξ_k, η_k, ζ_k)。如果我們把每一個小塊 Δ_k 用位於點 (ξ_k, η_k, ζ_k)處具有質量

$$\rho(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\Delta_k$$

的質點來替代，則給定的物體就被一個由有限個質點組成的質點系所代替，這個質點系與給定的物體的靜力學性質是很相近的。但是，對於

這樣一個質點系來說，它的重心坐標是：

$$\frac{\sum_k \xi_k\rho(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\Delta_k}{\sum_k \rho(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\Delta_k},\quad \frac{\sum_k \eta_k\rho(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\Delta_k}{\sum_k \rho(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\Delta_k},\quad \frac{\sum_k \zeta_k\rho(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\Delta_k}{\sum_k \rho(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\Delta_k}.$$

因而，我們很自然地把這三個表達式當 $d(T)\to 0$ 時的極限 $\bar{x},\bar{y},\bar{z}$ 取來作爲給定的物體的重心座標，這三個極限分別等於

$$\bar{x}=\frac{\iiint\limits_{\mathscr{V}} x\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz}{\iiint\limits_{\mathscr{V}} \rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz},\quad \bar{y}=\frac{\iiint\limits_{\mathscr{V}} y\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz}{\iiint\limits_{\mathscr{V}} \rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz},$$

$$\bar{z}=\frac{\iiint\limits_{\mathscr{V}} z\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz}{\iiint\limits_{\mathscr{V}} \rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz},$$

或者，把給定的物體的質量，記作 M，

$$\bar{x}=\frac{1}{M}\iiint\limits_{\mathscr{V}} x\rho\,dx\,dy\,dz,\quad \bar{y}=\frac{1}{M}\iiint\limits_{\mathscr{V}} y\rho\,dx\,dy\,dz,$$

$$\bar{z}=\frac{1}{M}\iiint\limits_{\mathscr{V}} z\rho\,dx\,dy\,dz$$

（這裏，爲了簡單起見，我們在積分號下寫 ρ 來代替 $\rho(x,y,z)$）。特別，如果給定的物體是均勻的（換句話說，在整個物體上 ρ 是一個常數），則 $M=\rho V$，因而

$$\bar{x}=\frac{1}{V}\iiint\limits_{\mathscr{V}} x\,dx\,dy\,dz,\quad \bar{y}=\frac{1}{V}\iiint\limits_{\mathscr{V}} y\,dx\,dy\,dz,$$

$$\bar{z}=\frac{1}{V}\iiint\limits_{\mathscr{V}} z\,dx\,dy\,dz.$$

現在我們轉到給定的物體的轉動慣量的問題，我們仍然首先依照逼近的手續把給定的物體換成上面所說的由有限個質點組成的質點系。這個質點系對於 XOY 平面的轉動慣量是：

$$\sum_k \zeta_k^2 \rho(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\Delta_k ,$$

對於其他兩個座標平面有類似的結果。對於 OX 軸的轉動慣量是：

$$\sum_k (\eta_k^2+\zeta_k^2)\rho(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\Delta_k,$$

對於其他兩個座標軸也有類似的結果。最後，質點系對於座標原點 O 的轉動慣量是：

$$\sum_k (\xi_k^2+\eta_k^2+\zeta_k^2)\, \rho(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\Delta_k .$$

跟確定重心座標的情形完全一樣的推理，就得到，給定的物體對於 XOY 平面的轉動慣量等於

$$M_{xy}=\iiint\limits_{\mathscr{V}} z^2\rho(x, y, z)dx\,dydz,$$

對於其他兩個坐標平面的情形與此類似。同樣，給定的物體對於 OX 軸的轉動慣量等於

$$M_x=\iiint\limits_{\mathscr{V}} (z^2+y^2)\ \rho(x, y, z)\ dx\ dy\ dz .$$

最後，給定的物體對於座標的原點 O 的轉動慣量是：

$$M_o=\iiint\limits_{\mathscr{V}} (x^2+y^2+z^2)\ \rho(x, y, z)dx\,dy\ dz.$$

關於這方面的練習可以參看 Б. П. 捷米多維奇的習題集，第八章，習題 191，193，200，201。

第二十八章　曲線積分

§ 121. 平面上曲線積分的定義

在第二十六章裏，我們已經研究過下面這種類型的積分：

$$\int_a^b f(x, y)\,dx,$$

其中變量 y 是一個參變量，也就是說，在積分過程中保持固定值的一個量。現在我們來擴充變量 y 的這種參變作用，我們把 y 取作確定在積分範圍 $(a \leqslant x \leqslant b)$ 內的一個函數 $y=\varphi(x)$，使得被積函數成爲 $f[x, \varphi(x)]$的形式。正如我們下面就要假定的，只要函數$f(x, y)$與$\varphi(x)$都在相應的區域上連續，則函數 $f[x, \varphi(x)]$ 就在區間 $a\leqslant x\leqslant b$ 上連續，因而積分

$$\int_a^b f[x, \varphi(x)]\,dx \tag{1}$$

也就自然存在。

把區間(a, b)上的曲線 $y=\varphi(x)$ 的起點與終點分別地記作A與B（圖 80）。於是，積分(1)就稱爲**函數** $f(x, y)$**沿曲線段** AB **的曲線積分**，並且記作：

$$\int_{AB} f(x, y)\,dx; \tag{2}$$

這種記法必須了解作變量 y 是要用 x 的一個函數來代入的，而這個函數，它的圖形就是曲線段 AB。特別情形，如果 y 在積分的過程中保持固定的值 y_0（這就是含參變量的積分的情形），則積分 (2) 就是沿直線段 $y=y_0(a\leqslant x\leqslant b)$取的，而點$A$與$B$的座標分別是$(a, y_0)$與$(b, y_0)$。

因此很明顯，除了我們用符號(2)來記積分(1)以外，沿平面曲線段的曲線積分的概念，並不包含什麼新的內容。還要指出一點，在以上這種的記法裏，曲線段 AB 的方向（從 A 到 B）是不能忽視的；事實上，根據符號(2)的定義，我們有：

$$\int_{BA} f(x, y)\, dx = \int_b^a f[x, \varphi(x)]\, dx = -\int_a^b f[x, \varphi(x)]\, dx =$$

$$= -\int_{AB} f(x, y)\, dx,$$

換句話說，如果在曲線積分裏改變曲線的方向，則曲線積分的值要改變符號。

曲線積分的這個原始定義在應用上是很受限制的，因爲我們對曲線段 AB 加上了一個非常受拘束的條件——在整個曲線段上，y 必須是 x 的單値函數（或者，用幾何的語言來說，任何一條平行於 OY 軸的直線與這個曲線段至多相交於一點）。但是，在應用上常常還必需引進沿着更複雜一些的曲線段的積分；特別是，對於力學與物理的許多問題來說，會求沿着一些最簡單的封閉曲線的積分是極端重要的；但是，很明顯，任何封閉曲線都不滿足上述最簡單情形的條件。因此，我們有必要來設法找出一種分析工具，它使得我們能够把曲線積分的概念擴充到更普遍的情形。

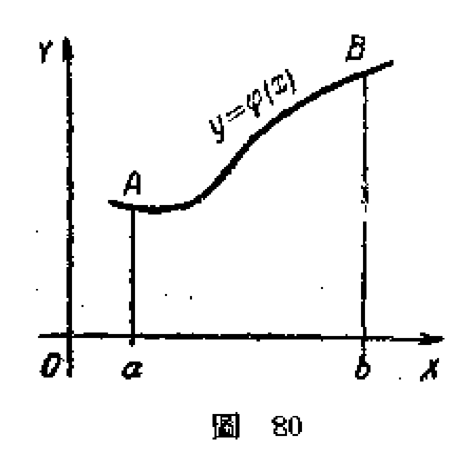


圖 80

爲此目的，我們先來考慮上述最簡單的情形，並且我們假定，函數 $\varphi(x)$（它的圖形就是曲線段 AB）在區間 (a, b) 上不僅連續，而且在該區間上具有連續的導數。我們用分點 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 把曲線段 AB 分成小段，把曲線段 $A_{k-1}A_k$ 之長記作 λ_k。我們知道(§ 52)，λ_k 可以表作下列積

分：

$$\lambda_k=\int_{x_{k-1}}^{x_k}\sqrt{1+\varphi'^2(x)}\,dx,$$

其中 x_{k-1} 與 x_k 分别是曲線段 AB 上的點 A_{k-1} 與 A_k 的橫坐標。根據中值定理，我們有：

$$\lambda_k=\sqrt{1+\varphi'^2(\xi_k)}\,\Delta_k, \tag{3}$$

其中 $\Delta_k=x_k-x_{k-1}$，而 ξ_k 是區間 (x_{k-1}, x_k) 上的某一點。注意，因為 $\varphi'(\xi_k)$ 是曲線 AB 在點 $x=\xi_k$ 的切線與 OX 軸的正方向之間的夾角 α_k 的正切，所以

$$1+\varphi'^2(\xi_k)=\sec^2\alpha_k=\frac{1}{\cos^2\alpha_k},$$

因而關係式(3)給出：

$$\lambda_k\cos\alpha_k=\Delta_k,$$

這裏我們應該算作 $\cos\alpha_k>0$，這也就等於說，我們算作切線與 OX 軸之間的夾角 α_k 是一個銳角(或者，也就是說，切線的方向取在 x 增大的一方)。如果我們希望 $\lambda_k\cos\alpha_k$ 與 Δ_k 的符號相同，這樣來選取切線的方向是必要的，因為在我們所做的假定 $a<b$ 之下，永遠都有 $\Delta_k=x_k-x_{k-1}>0$。反過來，要是我們有 $a>b$，則對於任意的 k 我們都有 $\Delta_k<0$，而這就說明，要使關係式 $\lambda_k\cos\alpha_k=\Delta_k$ 仍舊成立，就必需要求 $\cos\alpha_k<0$；在這種情形下角 α_k 就必須取作鈍角，也就是說，切線的方向必須取在 x 減小的一方。因此，不論是在那一種情形，切線的方向都必須取得來符合於沿曲線從 A 到 B 的運動方向，至於這個運動是從左到右或者從右到左都沒有關係。

現在我們對剛才所分的全部小曲線段作和數

$$\sum_k f(\xi_k,\eta_k)\cos\alpha_k\cdot\lambda_k=\sum_k f(\xi_k,\eta_k)\Delta_k, \tag{4}$$

其中在每一項裏 $\eta_k=\varphi(\xi_k)$。令 λ_k 中的最大者趨向於零（當然，Δ_k 中的最大者更趨向於零），曲線段 AB 的分法就越來越細。因爲根據我們的假定函數 $f[x,\varphi(x)]$ 在區間 (a,b) 上是連續的，所以等式(4)的右端就以積分

$$\int_a^b f[x,\varphi(x)]\,dx,$$

爲它的極限，我們上面已經把這個積分就記作

$$\int_{AB} f(x,y)\,dx$$

並且稱它爲函數 $f(x,y)$ 沿曲線段 AB 的曲線積分。當然，等式(4)的左端這時也趨向於這同一個極限，換句話說，我們有：

$$\int_{AB} f(x,y)\,dx=\lim\sum_k f[\xi_k,\varphi(\xi_k)]\cos\alpha_k\cdot\lambda_k\,. \tag{5}$$

如果我們一般地用 $\alpha=\alpha(x,y)$ 來代表曲線 AB 在點 (x,y) 的切線與 OX 軸的正方向之間的夾角，則我們就有 $\alpha_k=\alpha(\xi_k,\eta_k)$；而等式(5)右端的和數就可以寫成：

$$\sum_k f(\xi_k,\eta_k)\cos\alpha(\xi_k,\eta_k)\cdot\lambda_k=\sum_k F(\xi_k,\eta_k)\lambda_k,$$

其中 $F[x,\varphi(x)]=f[x,\varphi(x)]\cos\alpha[x,\varphi(x)]$ 在區間 (a,b) 上是 x 的一個連續函數。但是，由於我們假定了導數 $\varphi'(x)$ 的連續性，曲線 $y=\varphi(x)$ 在區間 (a,b) 上是可求長的；而對於可求長的曲線，當分法無限變細時，和數

$$\sum_k F(\xi_k,\eta_k)\lambda_k$$

（其中 (ξ_k,η_k) 是曲線段 λ_k 上的任意一點）必然趨向於一個確定的極限（§ 52），我們曾經把這個極限記作

$$\int_{AB} F(x, y)\, d\lambda,$$

並且稱爲函数 $F(x, y)$ 沿曲線段 AB 的積分。

因此，在我們現在的情形，就有

$$\sum_k f[\xi_k, \varphi(\xi_k)] \cos\alpha\, [\xi_k, \varphi(\xi_k)]\, \lambda_k \to \int_{AB} f(x, y) \cos\alpha(x, y)\, d\lambda.$$

把這個結果與關係式(5)對照一下，我們就得到：

$$\int_{AB} f(x, y)\, dx = \int_{AB} f(x, y) \cos\alpha(x, y)\, d\lambda. \tag{6}$$

在這個等式裏，左端是沿曲線段 AB 在本節一開始所說的意義之下的曲線積分；而右端則是在§52中的意義之下的"沿曲線 AB 的積分"。後者的定義與前者的定義在原則上是不同的，因爲它是構造性的，它把積分直接規定爲一種確定結構的結果，規定爲一種有確定形式的和數的極限。因此，我們可以把關係式(6)看成是曲線積分的一個新的、構造性的定義。我們再度指出，這裏 $\alpha(x, y)$ 是 OX 軸的正方向與曲線 AB 在點 (x, y) 的切線之間的夾角，切線的方向則是這樣確定的，它與沿曲線從 A 到 B 的運動方向一致（也就是說，當 $a < b$ 時，$\cos\alpha(x, y) > 0$；而當 $a > b$ 時，$\cos\alpha(x, y) < 0$）。

暫時我們以上談到的還只是最簡單的情形，即給定的曲線在 AB 這一段可以用 $y = \varphi(x)$ 形式的方程表達的情形。如果不是這種情形，則等式(6)左端的積分就沒有意義，因爲在曲線 AB 上，一般說來，可能有幾個 y 的值對應於 x 的同一個值。但是等式右端的積分却完全是另一回事。它那個構造性的定義是我們在§52中給出的，這個定義一點也不依賴於曲線 AB 是否可以表作像 $y = \varphi(x)$ 這種形式；它可以毫無修改地適用於更一般的情形，特別是，曲線 AB 是任意一條"光滑"曲線的情形。在這種更一般的情形下，從 A 到 B 來描畫曲線的方向，一般說來，不再永遠是從左到右（或者永遠是從右到左）；在曲線 AB 的不同的

部分上，這個方向也可能不同(圖 81)，所以角 $\alpha(x,y)$ 可能時而是銳角時而又是鈍角，而 $\cos\alpha(x,y)$ 也就相應地時而爲正時而爲負。當然，在等式(6)右端的被積函數裏，爲了要確定角 α，我們仍然應該把切線的方向取得與曲線從 A 到 B 的方向一致。

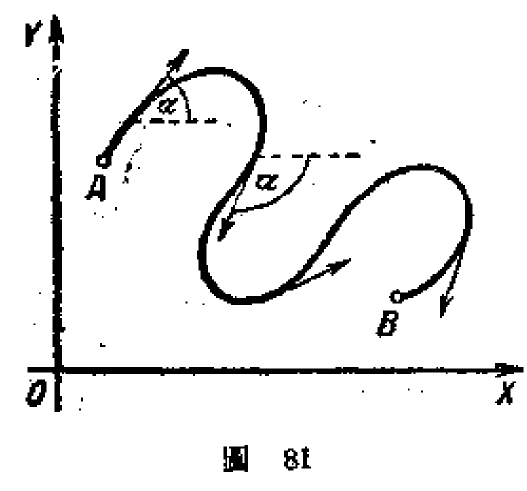


圖 81

上面的討論很自然地引導我們這樣去想：當等式(6)右端的積分存在時，我們不妨就用等式(6)來定義曲線積分

$$\int_{AB} f(x,y)\,dx\,.$$

我們剛才已經指出過，曲線積分概念的這樣一個擴充使得我們能够沿着更廣泛的一類曲線來進行積分；特別說來，這類曲線包括最簡單的封閉曲線——圓周，橢圓等等。

採用以上這樣利用公式(6)來確定曲線積分的一般定義，好像是把曲線積分概念與我們在 § 52 中所建立的"沿可求長曲線 AB 的積分"的概念看成一個東西了。其實，它們畢竟還是不完全一樣的。事情是這樣的：在我們以前沿可求長曲線 $\mathscr{C}$ 的積分

$$\int_{\mathscr{C}} F(x,y)\,d\lambda$$

的定義中，被積函數只要依賴於曲線 $\mathscr{C}$ 上的點 (x,y) 就行了；然而，在公式(6)的右端，被積函數 $f(x,y)\cos\alpha(x,y)$ 除依賴於 (x,y) 外，實質上還依賴於曲線 AB 在點 (x,y) 的切線所取的方向。當這個方向改變成相反的方向時，$\cos\alpha(x,y)$ 改變符號，從而整個被積函數也要改變符號。我們以前所定義的"沿曲線 $\mathscr{C}$ 的積分"不依賴於曲線的方向；因爲實際上，根據這種積分的定義，怎麼樣選取曲線的方向對它都是沒有影響的。但是對於公式(6)右端的積分，情形就完全不同了。如果我們給

曲線 AB 指定一個確定的方向，比方說，從 A 到 B，於是曲線在每一點上的切線也就有了確定的方向；於是 $\cos\alpha(x,y)$，因而整個被積函數，在點 (x,y) 就有了完全確定的值，從而，我們的積分就變成了一個"沿曲線 AB 的積分"。如果我們改變曲線 AB 的方向，則被積函數在每一點上都改變符號，因而積分也就改變符號。因此，對於曲線積分，我們有

$$\int_{BA} f(x,y)\,dx = -\int_{AB} f(x,y)\,dx\,,$$

這個符號上的差別，如我們所看到的，是因為公式(6)確定積分 $\int_{AB} f\,dx$ 與 $\int_{BA} f\,dx$ 時使用的是兩個不同的(被積函數彼此差一個符號的)"沿曲線 AB 的積分"的緣故。

在曲線積分裏，我們也常常用一個字母，比方說 $\mathscr{C}$，來代表積分所沿的曲線；但是這種記法並不能告訴我們曲線的方向，因此在這種情形必須特別說明這個方向，不然積分就沒有確定的意義了。如果曲線 $\mathscr{C}$ 具有端點 A 與 B，則我們通常總是用 AB 或 BA 來代表曲線的兩個正好相反的方向。如果曲線 $\mathscr{C}$ 是封閉的，沒有端點，則最簡單的情形，是它把平面分成兩部分——內部和外部。在這種情形下，通常都把描畫曲線時內部永遠在左邊的那個方向叫做是**正方向**，而相反的方向則稱為**反方向**。如果曲線積分表作

$$\int_{\mathscr{C}} F(x,y)\,dx\,,$$

其中 $\mathscr{C}$ 是一條封閉曲線，則雖然沒有指明曲線 $\mathscr{C}$ 的方向，通常也總是了解作取的是正方向；這個規定我們在以後要一直遵守。

不言而喻，在本節裏我們關於

$$\int_{AB} f(x,y)\,dx$$

這種形式的積分的討論，也毫無改變地適用於

$$\int_{AB} f(x, y)\, dy$$

這種形式的積分。如果積分的曲線段 AB 可以表作

$$x=\psi(y) \quad (c\leqslant y\leqslant d)$$

形式的方程，則按定義我們令

$$\int_{AB} f(x, y)\, dy=\int_c^d f[\psi(y), y]\, dy.$$

跟公式(6)一樣，我們可以證明，在這個"最簡單"的情形下

$$\int_{AB} f(x, y)\, dy=\int_{AB} f(x, y) \sin\alpha\, d\lambda \tag{7}$$

(因爲對於曲線 AB 的切線與 OY 軸夾成的的銳角 β，顯然有 $\cos\beta=\sin\alpha$)，並且，只要公式(7)右端的積分有意義，我們就可以用這個公式來作爲左端的積分的定義。當然，在這裏曲線在每一個點上的切線的方向(因而 $\sin\alpha$ 的符號)都要符合於曲線 AB 所取的方向。

在實際應用上，我們時常需要討論如下形式的和：

$$\int_{AB} P(x, y)\, dx+\int_{AB} Q(x, y)\, dy,$$

在這個和的兩個積分中，不但被積函數彼此不同，就連積分變量也不一樣，不過取積分倒是沿着同一條曲線 AB 取的。我們通常把這種和寫成

$$\int_{AB} [P(x, y)\, dx+Q(x, y)\, dy],$$

或者，更簡單一些，寫成

$$\int_{\mathscr{C}} (P\, dx+Q\, dy).$$

根據公式(6)與(7)，我們有：

$$\int_{\mathscr{C}} (P\, dx+Q\, dy)=\int_{\mathscr{C}} (P\cos\alpha+Q\sin\alpha)\, d\lambda. \tag{8}$$

§ 121 的練習可以參看 Б. П. 捷米多維奇的習題集，第八章，習題 293，295，299.

§ 122. 平面力場所作的功

曲線積分在幾何、物理以及技術科學中，有着大量的應用。在深入討論之前，作為一個例子，我們現在來考慮這些應用中最重要而且最典型的一個。

在 § 45 中我們已經考慮過在質點作直線運動的情形下變力作功的問題；現在我們來考慮同一個問題，但是我們只假定質點是沿着某一條平面曲線運動。

假定有力 F 作用在位於一個已知平面的某一點 (x, y) 處的一個質點上，F 的大小與方向都由質點位置所在的那一點的座標 x 與 y 唯一確定。於是，對於平面（或者它的某一部分）的每一點，都聯系着一個確定的向量 $\boldsymbol{F}$，它代表質點位於該點時，作用在質點上的力。這種向量的全體稱為確定在該已知平面（或者它的某一部分）上的一個**平面力場**。

現在假定有一個質點通過平面上某一條光滑曲線的一段 AB，又假定在該曲線段上已經給定了一個力場 $\boldsymbol{F}$。我們現在要來求出在這個運動中力場 $\boldsymbol{F}$ 所作的功。要確定一個力場，最方便的辦法是給出力向量 $\boldsymbol{F}$ 在 OX 軸與 OY 軸方向上的支量 $P(x, y)$ 與 $Q(x, y)$；我們假定，這兩個函數在某一個包含曲線 AB 在內的區域上連續。

我們先把質點走的道路 AB 分成一些小段 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$，又在每一個小段 λ_k 上任意取一點 $A_k(x_k, y_k)$。令 $\boldsymbol{F}_k$ 代表作用於點 A_k 的力向量，$|\boldsymbol{F}_k|$ 代表這個向量的絕對值。其次，令 φ_k 代表向量 $\boldsymbol{F}_k$ 與曲線 AB 在點 A_k 的切線之間的夾角，切線的方向取得來與運動的方向一致（或者，也就是說，令 φ_k 代表向量 $\boldsymbol{F}_k$ 與動點在點 A_k 的速度向量之間的夾角）。試設想如果小段 λ_k 是與它等長的一個直線段，又它的方向就是

剛才所說的切線方向，又如果作用在這一小段上的力就是向量 $\boldsymbol{F}_k$ 所代表的常力。則根據普通物理的法則，當質點通過這一小段 λ_k 時，這個常力所作的功就等於

$$|\boldsymbol{F}_k|\cos\varphi_k\cdot\lambda_k\ .$$

當 λ_k 很小，又當點沿曲線移動時向量 $\boldsymbol{F}$ 以及曲線 AB 的切線方向的變化都連續時，上面這個乘積很明顯可以作爲動點沿 λ_k 移動時力場所作的功的一個近似表達式。但是因爲很自然地我們可以認爲，力場在整個曲線段 AB 上所作的功等於它在每一小段上的"元"功的總和，所以和數

$$\sum_{k=1}^{n}|\boldsymbol{F}_k|\cos\varphi_k\cdot\lambda_k$$

就可以看作是我們所求的整個的功的一個近似值，而且，這些小段 λ_k 的長度(直徑)越短，這個近似表達式就越加精確。我們知道(§52)，當曲線段 AB 的分法無限變細時，這個和數趨向於一個確定的極限，這個極限既不依賴於 AB 的分法，也不依賴於每一個小段上點(x_k, y_k)的取法；很自然地，我們就把這個極限算作是力場在整個曲線段 AB 上所作的功的精確表達式。這個極限，按照我們以前的規定，應該記作

$$\int_{AB}|\boldsymbol{F}|\cos\varphi\, d\lambda\,,$$

其中 $|\boldsymbol{F}|\cos\varphi$ 就是作用於點(x, y)的力向量在該點的道路方向上的投影。但是，根據向量代數的法則，一個向量在任何方向上的投影等於它的支量在該方向上的投影之和；因此，如果我們把 OX 軸的正方向與動點在點(x, y)的速度向量之間的夾角記作 $\alpha=\alpha(x, y)$，則我們就有：

$$|\boldsymbol{F}|\cos\varphi=P(x, y)\cos\alpha+Q(x, y)\sin\alpha\,,$$

而這就給出力場在曲線段 AB 上所作的功的表達式

$$W=\int_{AB}\{P(x, y)\cos\alpha+Q(x, y)\sin\alpha\}\, d\lambda,$$

或者，根據 § 121 的公式(8)，

$$W=\int_{AB}\{P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy\},$$

這樣，我們提出的問題就完全解決了。在這裏我們看到了，跟這個問題相關聯的一些物理概念，正是在我們所建立的曲線積分的一般概念的術語裏，才得到了精確的數學表述。

§ 123. 格林公式

沿着閉曲線所取的曲線積分在實際應用上起着特別重要的作用；在本節和下節裏，我們特別來討論這種類型的積分。在這裏，作為積分道路，我們只考慮不自己相交的光滑曲線；這種曲線，如我們已經指出過的，永遠把平面分成兩個部分——外部與內部。我們把這種閉路記作$\mathscr{L}$，如我們在前面所說的，我們總是把積分

$$\int_{\mathscr{L}}(P\,dx+Q\,dy)$$

了解為沿曲線$\mathscr{L}$的"正"方向取的，也就是說，沿曲線$\mathscr{L}$的這樣一個方向取的，當點沿$\mathscr{L}$按這個方向移動時，內部永遠在點的左邊（圖 82）。相反的方向稱為"反的"方向。

我們來考慮 XOY 平面上的一個區域$\mathscr{D}$，它的上下邊界分別是曲線 $y=\varphi_1(x)$與 $y=\varphi_2(x)$，而左右兩側的邊界分別是直線 $x=a$ 與 $x=b$（圖 83）。在特別情形，這兩個直線（或者其中的一條）可能縮成一點，這時，曲線 $y=\varphi_1(x)$與 $y=\varphi_2(x)$在 $x=a$ 與$x=b$ 就連接起來了。我們假定，函數 $\varphi_1(x)$與 $\varphi_2(x)$在區間(a,b)上都是連續的。假定$P(x,y)$是在區域$\mathscr{D}$內以及在它的邊界上都連續並且具有連續偏導數的一個函數。由前一章我們知道，在這些假定之下，重積分

$$\iint_{\mathscr{D}}\frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy$$



圖 82

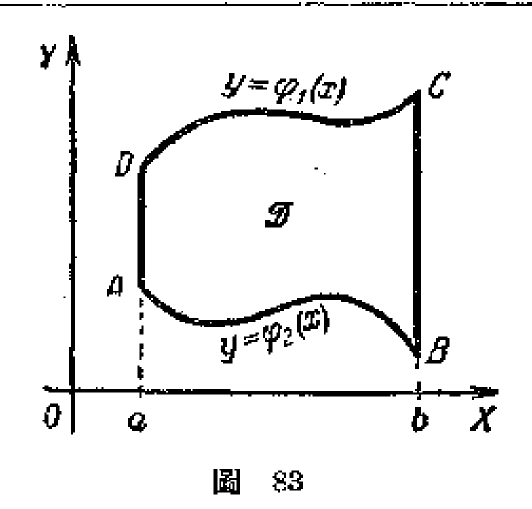


圖 83

存在並且可以表成

$$\int_a^b \left\{ \int_{\varphi_2(x)}^{\varphi_1(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy \right\} dx.$$

跟平常一樣，在求上式中裏邊一層(對 y)的積分時，x 保持不變；但是在這種情形下，顯然有：

$$\int_{\varphi_2(x)}^{\varphi_1(x)} \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} dy = P[x, \varphi_1(x)] - P[x, \varphi_2(x)],$$

因此我們得到：

$$\iint_{\mathscr{D}} \frac{\partial P}{\partial y} dx\, dy = \int_a^b P[x, \varphi_1(x)]\, dx - \int_a^b P[x, \varphi_2(x)]\, dx.$$

根據 § 121 中的原始定義，上式右端的兩個積分都是函數 $P(x, y)$ 的曲線積分；第一個積分是沿曲線 $y=\varphi_1(x)$ 的一段 DC 取的，第二個積分是沿曲線 $y=\varphi_2(x)$ 的一段 AB 取的。因此，我們可以寫成

$$\iint_{\mathscr{D}} \frac{\partial P}{\partial y} dx\, dy = \int_{DC} P(x, y)\, dx - \int_{AB} P(x, y)\, dx =$$

$$= -\int_{CD} P(x, y)\, dx - \int_{AB} P(x, y)\, dx. \qquad (1)$$

我們要注意，函數 $P(x, y)$沿直線段 AD 與 BC（按任意方向）對 x 的積分都等於零。事實上，沿這些線段的積分不能再根據 § 121 的原始意義來確定，因爲沿這些線段 y 不是 x 的單值函數。但是 § 121 中擴充了的定義在這裏是完全適用的，並且給出這兩個積分的値都是零，因爲，很明顯，在這些直線段上，$\cos\alpha=0$。

因此，我們可以把公式(1)寫成

$$\iint_{\mathscr{D}}\frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy=-\int_{AB}P\,dx-\int_{BC}P\,dx-\int_{CD}P\,dx-\int_{DA}P\,dx,$$

或即

$$\iint_{\mathscr{D}}\frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy=-\int_{\mathscr{L}}P(x, y)\,dx, \tag{2}$$

其中 $\mathscr{L}$ 是區域 $\mathscr{D}$ 的邊界，按照我們的一般規定，它取正方向。

現在我們可以設想，在整個以上的討論中，變量 x 與 y 的地位互換；於是圖 83 中的區域 $\mathscr{D}$ 應該換成圖 84 中的樣子。假定 $Q(x, y)$ 是在這個新區域 $\mathscr{D}$ 內以及它的邊界上都連續並且具有連續偏導數的一個函數。跟我們剛才所進行的步驟完全一樣，讀者自己可以獨立地進行計算，從而得到類似於等式(2)的下列關係式：

$$\iint_{\mathscr{D}}\frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy=\int_{\mathscr{L}}Q(x, y)\,dy,$$

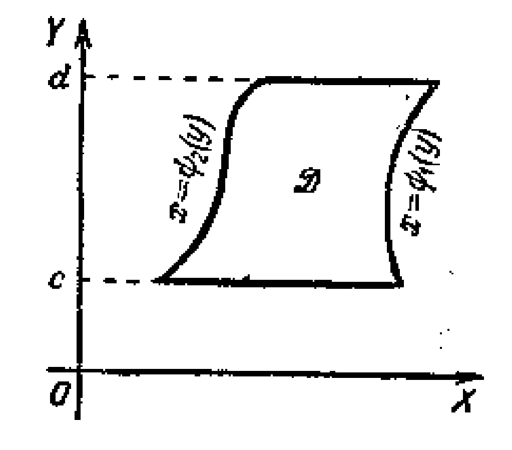


圖 84

不過這裏跟(2)式比較起來，右端差了一個符號。驟然看來，這個差別好像有些奇怪，但實際上，這個差別的出現是因爲在我們選擇閉曲線的方向時，座標軸之間的相互位置失掉了對稱性；按正方向沿着以原點爲中心的圓周(圖 85)轉動，如果要想使 OX 軸的正方向轉到 OY 軸的正方向，我們必須轉過 $90°$ 的弧；反之，如果我們要使 OY 軸的正方向轉到 OX 軸的正方向，則必須轉過

270° 的弧(或即,按反方向轉過 90° 的弧)。

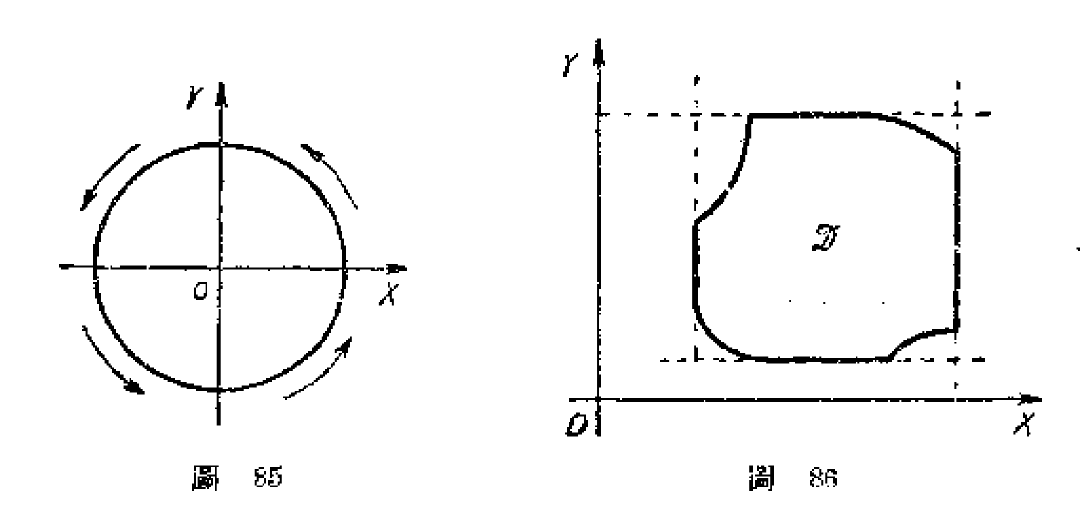


圖 85　　　　圖 86

現在我們假定區域 $\mathscr{D}$ 的形狀既滿足圖 83的條件又滿足圖84的條件(任意的圓,橢圓,凸的多角形及如圖 86 中所示的更一般的圖形,都滿足這個要求)。於是,如果 $P(x,y)$ 與 $Q(x,y)$是在區域 $\mathscr{D}$ 內以及它的邊界上都連續並且具有連續偏導數的兩個函數,則關係式(2)與(3)都成立。

從(3)式減去(2)式,我們就得到:

$$\iint\limits_{\mathscr{D}}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy=\int\limits_{\mathscr{L}}(P\,dx+Q\,dy).\qquad(4)$$

這個非常重要的關係式通常稱為**格林公式**,它建立了某種重積分與某種曲線積分之間的聯系,並且具有大量的實際應用。我們前面只證明了,對於某種特殊的區域,這個公式成立。其實,我們不難把它擴充到非常廣泛的一類區域的情形。事實上,我們來考慮這樣一個區域 $\mathscr{D}$(圖 87),它的邊界是一個簡單的(光滑的並且不自己相交的)閉路;我們引一條光滑曲線 l,把這個區域分成兩個區域 $\mathscr{D}_1$ 與 $\mathscr{D}_2$。姑且假定,格林公式(4)對於區域 $\mathscr{D}_1$ 與 $\mathscr{D}_2$ 都成立。我們把對應於這兩個區域的格林公式寫出來,並且把它們加起來。於是在等式左端我們就得到重積分

$$\iint\limits_{\mathscr{D}}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy,$$

而等式右端則是按正方向沿着區域$\mathscr{D}_1$與$\mathscr{D}_2$的邊界所取的兩個曲線積分之和。圖 87 中的箭頭表明，在這兩個積分中，曲線 l 所取的兩個方向剛好相反，因而對應於這兩部分的曲線積分就恰好互相抵消；而餘下部分的積分之和，顯然就是按正方向沿$\mathscr{D}$的邊界$\mathscr{L}$所取的積分。因此，我們已經證明了，如果格林公式對於區域$\mathscr{D}_1$與$\mathscr{D}_2$都成立，則它對於區域$\mathscr{D}$也必然成立。重複這個推理，我們不難知道，如果我們用曲線把區域$\mathscr{D}$分成任意多個區域，而對於每一個分成的區域格林公式都成立，則對於區域$\mathscr{D}$格林公式也成立。因而，特別說來，格林公式不但對於原始證明裏的特殊區域成立，而且對於任何區域，只要我們可以用一些適當的曲線把它分成有限個上述這種區域，也都成立。不難想到，這已經給出了很廣的一類平面區域。特別是，對於所謂有"洞"的"複連通"區域(圖 88)(即不僅由一條閉曲線，而是由若干條閉曲線所圍成的區域)，格林公式也成立，只要這種區域是若干上述簡單區域的"和"。在這種情形下，格林公式右端的曲線積分是沿區域$\mathscr{D}$的外邊界的積分與沿全部"洞"的邊界的積分之和，其中每一個邊界都取正方向，換句話說，當一個動點通過每一個這些邊界時，區域$\mathscr{D}$永遠都在它的左邊。

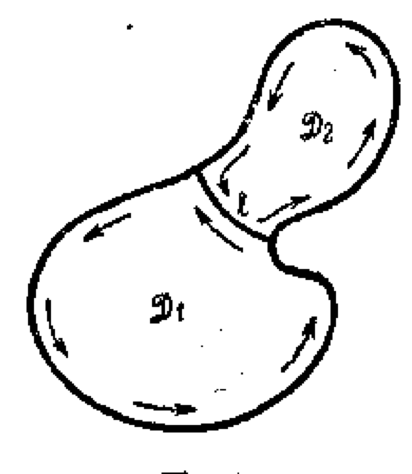


圖 87

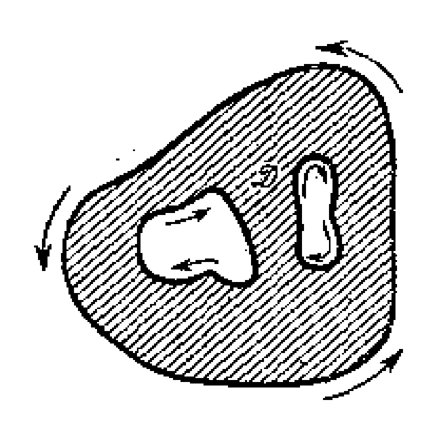


圖 88

最後，我們還可以證明，格林公式對於任意一條光滑閉曲線圍成的區域也成立。爲此，我們必須首先證明，由多角形(閉折線)圍成的區域總可以表成前面所

說的那種簡單區域之"和",因而格林公式可以應用到任意一個多角形。然後我們作已知光滑閉曲線的內接多角形，把格林公式應用到這些多角形,再令這種多角形的一切邊長無限減小，我們可以證明，通過極限過程,表達格林公式的關係式,對於已知光滑閉曲線圍成的區域仍舊成立。至於這個證明的詳細步驟,在這裏我們不能詳談了。

§ 123 的練習可以參看 Б. П. 捷米多維奇的習題集,第八章,習題 341, 342。

§ 124. 在二元函數的微分上的應用

除了在物理中的許多問題上有重要應用之外,格林公式,就在解決數學分析本身的一系列問題時也是非常有效的。在本節中我們就來考慮這種應用當中最重要的一個。

假定 $P(x, y)$ 與 $Q(x, y)$ 仍舊代表在 xy 平面上的某一個區域 $\mathscr{D}$ 上連續，並且具有連續偏導數的兩個函數。爲了使得我們的說明不至於被那些非本質的細節弄得複雜化,在以後所有的討論裏我們都假定,不論是區域 $\mathscr{D}$ 或者是在本節中所遇到的其他的區域都是開的(即只由內點組成的),單連通的(即無"洞"的)並且它們的邊界都是簡單的（不自己相交的)光滑閉曲線。

我們知道(§ 90), 如果表達式

$$P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy \tag{1}$$

在區域 $\mathscr{D}$ 上是某一個函數 $F(x, y)$ 的微分,則

$$P(x, y) = \frac{\partial F}{\partial x},\quad Q(x, y) = \frac{\partial F}{\partial y} \tag{2}$$

在區域 $\mathscr{D}$ 上到處都成立;反過來,在函數 P 與 Q 連續的假定下,從關係式 (2) 就可以推出,函數 $F(x, y)$ 在區域 $\mathscr{D}$ 上以表達式 (1) 爲它的微分。在數學分析的一系列的問題中，我們常常需要判斷表達式(1)在給定的區域上是否是某一個二元函數的微分,因此，很自然地，有這樣一

個判別準則是有很大的好處的。現在我們就要看到，利用格林公式我們不難建立這樣一個函數 P 與 Q 應該滿足的必要充分條件；更確切些說，我們實際上還不只是得出一個，而是得出三個這種必要充分條件（當然，這三個條件是彼此等價的，只不過是用不同的術語來表達的就是了）。

定理. 從下列四個斷語中的任何一個都可以推出其餘三個：

1° 表達式 $P\,dx+Q\,dy$ 在區域 $\mathscr{D}$ 上是某一個函數 $F(x,y)$ 的微分；

2° $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ 在區域 $\mathscr{D}$ 上到處成立；

3° 沿整個在區域 $\mathscr{D}$ 內部的任意一條光滑閉曲線所取的曲線積分

$$\int(P\,dx+Q\,dy)$$

都等於零；

4° 曲線積分

$$\int\limits_{AB}(P\,dx+Q\,dy)$$

只依賴於區域 $\mathscr{D}$ 的點 A 與 B，而與連接這兩點的積分道路無關，只要這條道路是整個在 $\mathscr{D}$ 的內部的一條光滑曲線。

這個定理說明了，條件 2°，3°，4° 中的任何一個，都可以作爲表達式 $P\,dx+Q\,dy$ 在區域 $\mathscr{D}$ 上是某一個函數 $F(x,y)$ 的微分的必要充分條件。我們還會看到，這個定理的證明使得我們還能夠同時找出函數 $F(x,y)$ 的表達式來，如果它存在的話。

爲了證明這個定理，我們現在來建立四個輔助命題，這四個命題的全體就是定理的證明。

引理 1. 從 1° 可以推出 2°。

證明. 從 $P\,dx+Q\,dy=dF$，可知

$$P=\frac{\partial F}{\partial x},\qquad Q=\frac{\partial F}{\partial y};$$

從而

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y},\qquad \frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial x};$$

因爲函數$\frac{\partial P}{\partial y}$與$\frac{\partial Q}{\partial x}$連續，所以上面兩個等式的右端彼此相等；因而左端也彼此相等，這就證明了引理 1.

引理 2. 從 2° 可以推出 3°。

證明. 假定$\mathscr{L}$是整個在區域$\mathscr{D}$內部的一條光滑的閉曲線。把格林公式應用到曲線$\mathscr{L}$所圍成的區域 Δ。因爲根據假定，$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$在區域$\mathscr{D}$上到處成立，所以格林公式的左端等於零，從而得到：

$$\int_{\mathscr{L}}(P\,dx+Q\,dy)=0,$$

而這就是我們所要證明的。

引理 3. 從 3° 可以推出 4°。

證明. 把區域$\mathscr{D}$的兩點A與B在區域$\mathscr{D}$上用兩條彼此不相交的曲線$\mathscr{L}_1$與$\mathscr{L}_2$連接起來（圖 89）。於是從A到B的道路$\mathscr{L}_1$與從B到A的道路$\mathscr{L}_2$合起來組成一條光滑的閉曲線；因此，根據我們的假定

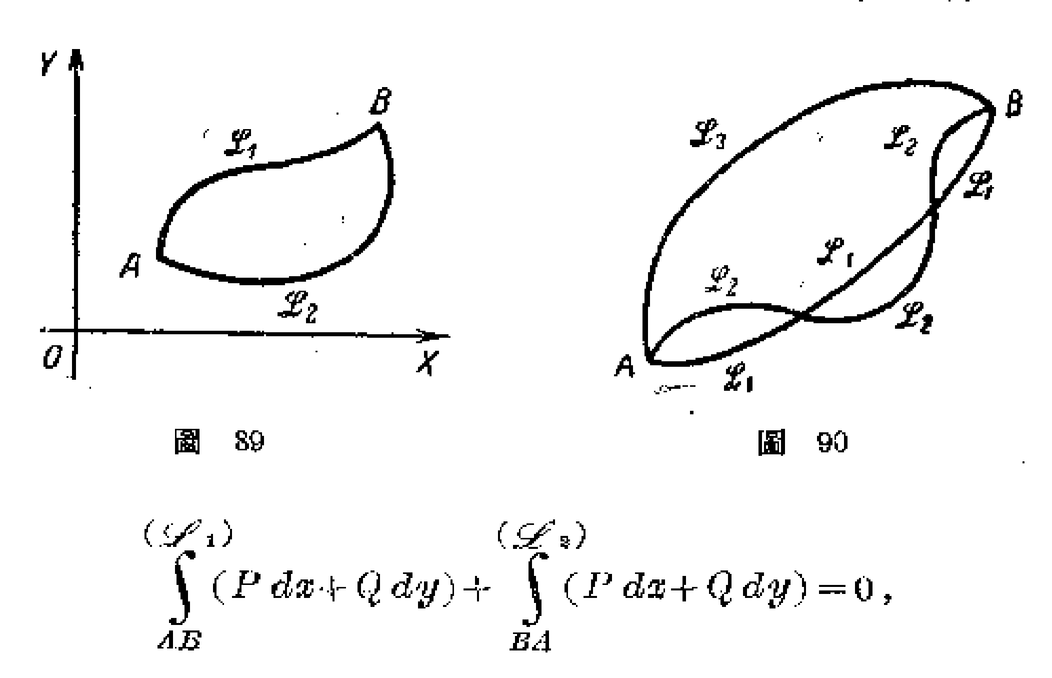


圖 89　　　圖 90

$$\int_{AB}^{(\mathscr{L}_1)}(P\,dx+Q\,dy)+\int_{BA}^{(\mathscr{L}_2)}(P\,dx+Q\,dy)=0,$$

但是因爲

$$\int_{BA}^{(\mathscr{L}_2)}(P\,dx+Q\,dy)=-\int_{AB}^{(\mathscr{L}_2)}(P\,dx+Q\,dy),$$

所以

$$\int_{AB}^{(\mathscr{L}_1)}(P\,dx+Q\,dy)=\int_{AB}^{(\mathscr{L}_2)}(P\,dx+Q\,dy);$$

這樣就對於彼此不相交的道路證明了引理 3。其次，如果 $\mathscr{L}_1$ 與 $\mathscr{L}_2$ 彼此相交(圖 90)，則我們可以用第三條道路 $\mathscr{L}_3$ 把 A 與 B 連接起來，使得這條道路也整個在區域 $\mathscr{D}$ 上並且既不與 $\mathscr{L}_1$ 相交也不與 $\mathscr{L}_2$ 相交❶。於是,根據剛才已證明了的結果,沿 $\mathscr{L}_3$ 的積分既與沿 $\mathscr{L}_1$ 的積分相等,也與沿 $\mathscr{L}_2$ 的積分相等；因而，沿 $\mathscr{L}_1$ 與 $\mathscr{L}_2$ 的兩個積分應該彼此相等,這就完全證明了引理 3。

引理 4. 從 4° 可以推出 1°。

證明. 考慮區域 $\mathscr{D}$ 上的一個固定點 $A(x_0, y_0)$與另外一點, $B(x, y)$, 我們把點 B 的坐標算作是變量,於是點 B 就可以走遍整個區域 $\mathscr{D}$。因爲我們假定了積分

$$\int_{AB}(P\,dx+Q\,dy)$$

不依賴於連接點 A 與 B 的積分道路(只要求這條道路整個在 $\mathscr{D}$ 的內部並且是光滑的),所以對於固定的點 A, 這個積分只依賴於點 B,換句話說,它是點 B 的座標 x 與 y 的一個單值函數 $F(x, y)$。如果我們能够證明,在區域 $\mathscr{D}$ 上的任何一點都有:

$$\frac{\partial F}{\partial x}=P, \qquad \frac{\partial F}{\partial y}=Q,$$

---

❶ 爲簡單起見,這裏我們假定了 $\mathscr{L}_3$ 這樣的道路是存在的。但事實上並非永遠如此,圖 91 所示的情形就說明了這一點。

則根據函數P與Q的連續性有：

$$dF=Pdx+Q\,dy\,,$$

而這樣引理4就證明了。

現在我們就來證明，比如說，關係式$\frac{\partial F}{\partial x}=P$。假定$B(x,y)$是區域$\mathscr{D}$的任意一個(內)點。如果$|h|$足够小，則點$C(x+h,y)$也必然是區域$\mathscr{D}$的點。用整個在區域$\mathscr{D}$內部的任意一條光滑道路把點$A$與$B$連接起來；再用直線段$BC$把這條道路延長到點$C$，於是我們就得到一條

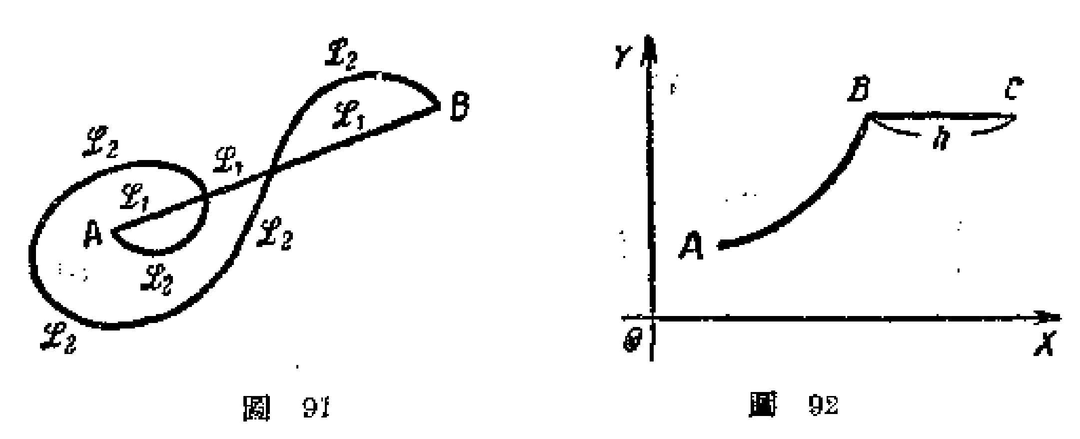


圖 91　　圖 92

(顯然，也是光滑的)道路ABC，它把點A與點C連接起來，並且整個在區域$\mathscr{D}$的內部(圖 92)。我們有：

$$F(x,y)=\int_{AB}(P\,dx+Q\,dy)\,,$$

$$F(x+h,y)=\int_{ABC}(P\,dx+Q\,dy)=\int_{AB}(Pdx+Q\,dy)+\int_{BC}(P\,dx+Q\,dy),$$

從而

$$F(x+h,y)-F(x,y)=\int_{BC}(P\,dx+Q\,dy)=\int_{BC}P\,dx,$$

因為[1]

$$\int_{BC}Q\,dy=0\,.$$

[1] 這是因為道路BC是水平的；在形式上，這可以跟我們在格林公式的論證裏證明沿垂直線段對x的積分等於零一樣來進行證明。

但是根據中值定理

$$\int_{BC} P\,dx = hP(\xi, y),$$

其中 $x<\xi<x+h$。因此我們得到：

$$\frac{F(x+h, y)-F(x, y)}{h}=P(\xi, y);$$

但因爲當 $h\to 0$ 時，$\xi\to x$，而函數 P 又在點 $B(x, y)$ 連續，所以

$$\frac{\partial F}{\partial x}=P(x, y).$$

完全類似地，我們也可以證明關係式

$$\frac{\partial F}{\partial y}=Q(x, y),$$

這樣引理 4 就證完了。

引理 1—4 合起來顯然就是上述主要定理，因此，主要定理的證明也完成了。

§ 124 的練習可以參看 Б. П. 捷米多維奇的習題集，第八章習題 300, 302, 305, 308。

§ 125. 空間的曲線積分

曲線積分的概念可以很自然地而且毫無困難地推廣到沿空間中的曲線進行積分的情形。在最簡單的情形，當空間曲線在 AB 這一段可以用方程

$$y=\varphi(x),\ z=\psi(x)\ (a\leqslant x\leqslant b \text{ 或 } a\geqslant x\geqslant b)$$

表達時（其中，函數 $\varphi(x)$ 與 $\psi(x)$ 在區間 (a, b) 上連續），我們按定義令

$$\int_{AB} F(x, y, z)\,dx=\int_a^b F[x, \varphi(x), \psi(x)]\,dx;$$

特別是由此可以推出，跟平面曲線的情形一樣

$$\int_{BA} F(x, y, z)\, dx = -\int_{AB} F(x, y, z)\, dx\,.$$

這個原始定義僅僅適用於最簡單的曲線段，跟處理平面曲線積分的情形一樣，我們也可以把它擴充到一般的情形。

假定函數 $\varphi(x)$ 與 $\psi(x)$ 在區間 (a, b) 上有連續的導數，我們仍舊把曲線段 AB 分成一些"小段" λ_k，這些小段都是空間曲線的小弧。我們有(§ 53)：

$$\lambda_k = \int_{x_{k-1}}^{x_k} \sqrt{1+\varphi'^2(x)+\psi'^2(x)}\, dx,$$

其中 x_{k-1} 與 x_k 是 λ_k 的端點的橫座標。

令 $\alpha = \alpha(x, y, z)$ 代表曲線 AB 在點 (x, y, z) 的切線與 OX 軸的正方向之間的夾角(切線的方向總是取得來對應於從 A 到 B 的運動方向)，我們有(§ 58)

$$\cos\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{1+\varphi'^2(x)+\psi'^2(x)}},$$

這裏，在曲線段 λ_k 上，如果 $x_k > x_{k-1}$，我們取"+"號，如果 $x_k < x_{k-1}$，我們就取"−"號。和 § 121 的論證完全一樣，我們不難由此證明，在曲線段 AB 最簡單的情形，跟 § 121 的公式(6)類似的公式

$$\int_{AB} F(x, y, z)\, dx = \int_{AB} F(x, y, z)\cos\alpha(x, y, z)\, d\lambda$$

成立。這裏也跟那裏一樣，等式右端的積分得到了一個構造性的定義(規定爲一種確定形式的和的極限)，它在曲線段 AB 比較複雜的情形下也有意義。(特別說來，只要這個曲線段可以分成有限個簡單的小段，等式右端的積分就有意義，例如，最簡單的閉曲線就是這樣。顯然，即使 AB 是任意的一條光滑曲線時，積分也還是同樣有意義，這相當於我們在§ 121 中對於平面曲線所得到的結果。)因此，在這裏我們也可以把

以上得到的這個公式看成是公式左端的空間曲線積分的定義。對於最簡單的曲線段，這個定義與最初給的定義完全相同。

當然，上面所講的一切也都適用對變量 y 以及對變量 z 的積分。如果 P, Q 與 R 在包含曲線 $\mathscr{L}=AB$ 的一個空間區域上，是 x, y 與 z 的三個連續函數，則相應於 § 121 的公式(8)，我們有：

$$\int_{\mathscr{L}} (P\,dx+Q\,dy+R\,dz)=\int_{\mathscr{L}} (P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)d\lambda,$$

其中 α, β 與 γ 是曲線 $\mathscr{L}$ 在點 (x, y, z) 的切線分別與三個座標軸的正方向之間的夾角，這裏切線的方向應當取得來跟曲線 $\mathscr{L}$ 所取的方向一致。

因爲跟力場的存在相聯系着的一些物理過程，在絕大多數的情形下，都不是在平面上，而是在空間中進行的，所以我們總希望會求，當點沿任意一條光滑的空間曲線運動時，力場的力所作的功，這個願望是完全自然的（當然，我們得假定力場是分佈在空間或空間的某一部分）。如果在空間的點 (x, y, z) 上的場向量是用它的支量 $P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)$ 給出來的，則我們可以像 § 122 中對平面力場的作法完全一樣地來證明，當質點沿曲線 AB 運動時力場所作的功 W 可以表作積分

$$\int_{AB} (P\,dx+Q\,dy+R\,dz).$$

最後，跟平面的情形一樣，沿空間曲線的曲線積分在下面也在這樣一個問題中起着重要的作用，即：在什麼樣的條件下，表達式

$$P(x, y, z)\,dx+Q(x, y, z)\,dy+R(x, y, z)\,dz$$

是一個三元函數 $F(x, y, z)$ 的微分？對於形狀相當簡單的空間區域，我們有與 § 124 中的定理完全類似的一個定理，這個定理由下列四個等價的斷語組成：

$1^{\circ\prime}$ 表達式 $P\,dx+Q\,dy+R\,dz$ 在空間區域 $\mathscr{G}$ 上是一個函數 $F(x, y, z)$ 的微分；

$2^{\circ\prime}$ 等式

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x},\ \frac{\partial P}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial x},\ \frac{\partial Q}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial y},$$

在空間區域 $\mathscr{V}$ 上到處成立；

$3^{\circ\prime}$ 沿着整個在空間區域 $\mathscr{V}$ 內部的任何光滑閉曲線的曲線積分

$$\int (P\,dx+Q\,dy+R\,dz)$$

都等於零；

$4^{\circ\prime}$ 曲線積分

$$\int_{AB} (P\,dx+Q\,dy+R\,dz)$$

只依賴於點 A 與 B，與連接這兩點的積分道路無關，只要這條道路是整個在 $\mathscr{V}$ 的內部的一條光滑曲線。

要想證明這些命題的等價性，我們只需依次證明與 § 124 的引理 1—4 完全類似的四個引理。這些引理應該怎樣敍述是顯然的，這裏就不再敍述了。讀者可以毫無困難地發現，在這裏，相當於 § 124 的引理 1,3,4 的三個命題可以像那裏一樣地證明；但是相當於 § 124 的引理 2 的命題："從 $2^{\circ\prime}$ 可以推出 $3^{\circ\prime}$"的證明就不同了，我們暫時還不能利用與§ 124 引理 2 的證明類似的方法，因爲對於空間的曲線積分，還沒有一個與格林公式類似的公式。在本章裏，我們還不能建立這樣一個公式，因爲這個公式本身要牽涉到曲面積分的概念，而這個新概念要在下一章才引進。在那裏，我們還要再回到這個問題，根據一個與格林公式類似的公式來證明我們這一串引理中的唯一的，我們現在還不能證明的環節("從 $2^{\circ\prime}$ 可以推出 $3^{\circ\prime}$")，這樣來完成斷語 $1^{\circ\prime}$—$4^{\circ\prime}$ 的等價性的證明。

§ 125 的練習可以參看 Б. П. 捷米多維奇的習題集，第八章，習題 326, 328, 335.

第二十九章　曲面積分

§ 126. 最簡單的情形

在 § 121 中，我們把含參變量(在空間的情形，含兩個參變量)的積分概念很自然地加以推廣，來引進了曲線積分的概念。如果我們的出發點是含參變量的二重積分，則類似的推廣，直接把我們引向本章所要講的，非常重要的曲面積分概念。

我們來考慮一個曲面，假定它在 x 與 y 取値的區域 $\mathscr{D}$ (區域 $\mathscr{D}$ 可以設想作任何一個可測圖形)上可以表作方程

$$z=f(x, y), \tag{1}$$

其中函數 $f(x, y)$ 在區域 $\mathscr{D}$ 上連續。我們用 $\mathscr{S}$ 來代表曲面(1)上，用平行於 OZ 軸的直線來投影時，剛好投影成 $\mathscr{D}$ 的那一塊，假定 $F(x, y, z)$ 是在三維空間中一個內部包含 $\mathscr{S}$ 的區域上連續的一個函數。如果把 z 看成一個常數，則二重積分

$$\int\limits_{\mathscr{D}} F(x, y, z)dx\,dy$$

就以 z 爲參變量，從而，它是參變量 z 的一個函數。但是我們可以採取更一般的觀點，把 z 算作是一個在區域 $\mathscr{D}$ 上連續的 x, y 的函數，比方說 $z=f(x, y)$，於是給定的積分就變成

$$\iint\limits_{\mathscr{D}} F[x, y, f(x, y)]\,dx\,dy\,,$$

其中，被積函數在區域 $\mathscr{D}$ 上連續，所以積分不成問題是存在的。這樣一個積分稱爲函數 $F(x, y, z)$ 沿曲面(1)的一塊 $\mathscr{S}$ 的一個**曲面積分**，並且記作

$$\iint\limits_{\mathscr{S}} F(x, y, z)\,dx\,dy\,;$$

積分號下的符號$\mathscr{S}$是用來指出，在積分的過程中量 z 應該看成是 x 與 y 的函數，而且這個函數就是由以 $\mathscr{S}$ 爲一部分的那個曲面的方程(1)所決定的那個函數。特别情形，如果在區域 $\mathscr{D}$ 上 z 是一個常量（我們推廣的出發點），則無非是我們在曲面(1)上進行積分的那一塊是平行於平面 XOY 的一部分平面，因而這時曲面積分(1)也就是一個普通的二重積分了。

我們現在假定，函數 $f(x, y)$在區域 $\mathscr{D}$ 上不僅連續，而且具有連續的偏導數。把給定的曲面塊 $\mathscr{S}$ 分成直徑❶很小的若干部分("小塊")。小塊 σ_k 的面積仍舊用 σ_k 來代表，這個面積，我們在 § 120 中已經知道，可以表作重積分

$$\sigma_k=\iint\limits_{\Delta_k}\frac{dx\,dy}{\cos\gamma}=\iint\limits_{\Delta_k}\sqrt{1+f_x'^2(x,y)+f_y'^2(x,y)}\,dx\,dy,$$

其中 Δ_k 是小塊 σ_k 在 XOY 平面上的投影，而 γ 則是給定的曲面在點 $[x, y, f(x, y)]$ 的法線與 OZ 軸的正方向之間夾成的銳角。根據中值定理(§ 116)，我們有：

$$\sigma_k=\frac{\Delta_k}{\cos\gamma_k},$$

其中 γ_k 是角 γ 在小塊 σ_k 的某一點(x_k, y_k, z_k)上的值。

現在我們作下列牽涉到曲面塊$\mathscr{S}$上所有小塊的和數：

$$\sum_k F(x_k, y_k, z_k)\cos\gamma_k\cdot\sigma_k=\sum_k F[x_k, y_k, f(x_k, y_k)]\Delta_k;$$

因爲根據我們的假定，$F[x, y, f(x, y)]$ 在區域 $\mathscr{D}$ 上是 x, y 的連續函數，所以根據第 27 章的結果，等式右端的和數，當分法無限變細時，以二重積分

❶ 爲了不使我們的敍述被那些與問題的本質沒有直接關係的細節弄得複雜化，在這裏以及以後所有的討論中，我們永遠假定，這些小塊以及以後會碰到的那些區域，都是由足夠簡單的閉曲線圍成的單連通的圖形；這樣一來，我們就可以把以前所建立的所有必要的概念與結果應用到這些小塊以及區域上去。

$$\iint_{\mathscr{D}} F[x, y, f(x, y)]\, dx\, dy$$

爲極限，而這個二重積分不是別的，它正是我們前面定義的曲面積分

$$\iint_{\mathscr{S}} F(x, y, z) dx\, dy .$$

因此，這個曲面積分可以看成是和數

$$\sum_k F(x_k, y_k, z_k) \cos \gamma_k \cdot \sigma_k = \sum_k \frac{F(x_k, y_k, z_k)}{\sqrt{1+f_x'^2(x_k, y_k)+f_y'^2(x_k, y_k)}} \sigma_k$$

當分法無限變細時的極限。但是下面這種形式的和數：

$$\sum_k \varphi(x_k, y_k, z_k)\sigma_k$$

（其中 σ_k 是曲面塊 $\mathscr{S}$ 分成的小塊的面積，而 (x_k, y_k, z_k) 是 σ_k 上的任意一點）的極限，在 § 120 的第 2 段中就已經考慮過了，在那裏我們曾經把這樣的極限稱爲函數 $\varphi(x, y, z)$ 展佈在曲面塊 $\mathscr{S}$ 上的積分，並且記作

$$\iint_{\mathscr{S}} \varphi(x, y, z)\, d\sigma.$$

因此，在這裏我們就有：

$$\iint_{\mathscr{S}} F(x, y, z)\, dx\, dy = \iint_{\mathscr{S}} F(x, y, z) \cos \gamma(x, y, z)\, d\sigma =$$

$$= \iint_{\mathscr{S}} \frac{F(x, y, z) d\sigma}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}}. \qquad (2)$$

這個公式與 § 121 的公式(6)完全類似，並且它在曲面積分的理論中所起的作用也正好像 § 121 的公式(6)在曲線積分的理論中所起的作用一樣。首先，在我們所考慮的最簡單的情形，這個公式已經給予了曲面積分概念一個新的，就其性質來說，還是構造性的定義（因爲公式

(2)的右端是定義作某種結構——一種有確定形式的和數的極限——的結果)。其次,我們很快就會看到,跟§121的公式(6)一樣,公式(2)是曲面積分概念一個很有意義的(超出了本節所考慮的簡單情形的範圍的)推廣的基礎。

不言而喻,如果對(x, z)或(y, z)這兩對變量之一進行積分,當然也有類似的定義與類似的關係式;只需要所取的那塊曲面$\mathscr{S}$可以表作類似於方程(1)的相應的方程就行。在實際應用中,我們常常會遇到展佈在同一塊曲面上的對於不同的"變量對"的三個積分之和。

假定$P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$與$R(x, y, z)$是在某一個包含曲面塊$\mathscr{S}$的(三維空間的)區域上連續的三個函數。假定$\alpha=\alpha(x, y, z)$, $\beta=\beta(x, y, z)$, $\gamma=\gamma(x, y, z)$分別是給定的曲面在$\mathscr{S}$的點(x, y, z)上的法線與OX, OY, OZ的正方向之間夾成的角,又假定我們可以這樣來選取法線的方向,使得在曲面塊$\mathscr{S}$上,角度α, β, γ都是銳角。通常我們都把積分之和

$$\iint_{\mathscr{S}} P(x, y, z)dy\,dz+\iint_{\mathscr{S}} Q(x, y, z)dz\,dx+\iint_{\mathscr{S}} R(x, y, z)\,dx\,dy$$

寫成一個積分的形式:

$$\iint_{\mathscr{S}} (P\,dy\,dz+Q\,dz\,dx+R\,dx\,dy);$$

如果我們所取的曲面塊$\mathscr{S}$是這樣的,在整個這塊曲面上,三個座標中的每一個都是另外兩個的具有連續偏導數的單值函數,則根據前面所說的,我們顯然有:

$$\iint_{\mathscr{S}} P\,dy\,dz=\iint_{\mathscr{S}} P\cos\alpha\,d\sigma, \iint_{\mathscr{S}} Q\,dz\,dx=\iint_{\mathscr{S}} Q\cos\beta\,d\sigma,$$

$$\iint_{\mathscr{S}} R\,dx\,dy=\iint_{\mathscr{S}} R\cos\gamma\,d\sigma,$$

因而，

$$\iint_{\mathscr{S}}(P\,dy\,dz+Q\,dz\,dx+R\,dx\,dy)=$$

$$\iint_{\mathscr{S}}(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\,d\sigma.$$

§ 127. 曲面積分的一般的定義

我們在 § 126 的開頭給出的曲面積分

$$\iint_{\mathscr{S}}F(x,y,z)\,dx\,dy$$

的簡單定義中，公開申明我們假定了給定的曲面在$\mathscr{S}$這一塊上可以表作 § 126 中(1)式那種形式的方程，即每一條與 OZ 軸平行的直線至多與$\mathscr{S}$相交於一點。這個限制，對於應用非常不方便，因為在應用上常常需要沿着一個封閉曲面取積分，但封閉曲面顯然是不會滿足我們所提出的要求的。因此，我們應該從 § 126 中所考慮的最簡單的情形出發，想辦法來把曲面積分的概念加以推廣，使得推廣後的概念能够包含在應用上所需要的更複雜的情形。

§ 126 的公式(2)給我們提供了這種推廣的一個有益的出發點。這個公式的中間部分，就它本身的定義來說，與曲面塊$\mathscr{S}$的形狀完全無關，比方說，對於足够簡單的閉曲面它仍然有明確的意義。因此，如果在最簡單的情形 § 126 的公式(2)是當作一個定理來證明的，則在比較複雜的情形，我們就可以把 § 126 公式(2)的前一個等式看成是它左端的積分的定義。用這個辦法我們就可以對任意曲面塊$\mathscr{S}$定義積分(1)，只要 § 126 的公式(2)的中間那個積分在$\mathscr{S}$上有意義就行。這樣我們已經完成了一個重要的推廣，對於極大多數的應用來說，這樣推廣後的曲面積分概念已經够用了。

但是，要想這個推廣了的定義是唯一的，我們還有必要對更一般形

狀的曲面塊，指定§126公式(2)的中間部分裏的角$\gamma(x,y,z)$的值；由於γ總是指給定的曲面的法線與OZ軸的正方向之間的夾角，所以要想指定這個值，我們就應該在曲面的每一點取定曲面的法線方向（當然，這也就相當於選定$\cos\gamma$的符號）。在最簡單的情形，我們已經規定總是取定法線的方向在OZ軸的正方向這一邊，也就是說，把γ取成銳角($\cos\gamma>0$)。這種規定在那裏是很自然的(甚至在實質上是唯一可能的)，因為在我們的討論中$\cos\gamma$最初是作為兩個面積之比而出現的。但是，不難看出，在曲面塊的形狀比較不那麼簡單的情形下，對於大多數在實際上常常遇到的問題來說，繼續這樣來規定法線方向，就會不方便了。

比方說，我們設想$\mathscr{S}$是一個球面。於是，在上半球面的點上，法線的方向必須取成向外的方向，而在下半球面的點上，則必須取成向內的方向；當點經過赤道時，法線所取的方向突然改變成正好相反(圖93)。不難預料到，如果在定義中這樣來選取法線的方向，這個定義會在很多情形與實際問題的意義不符，因而在求解時就會造成許多不必要的麻煩。因此，我們必須引進法線方向的另一種取法，這種取法應該沒有上述的缺點。

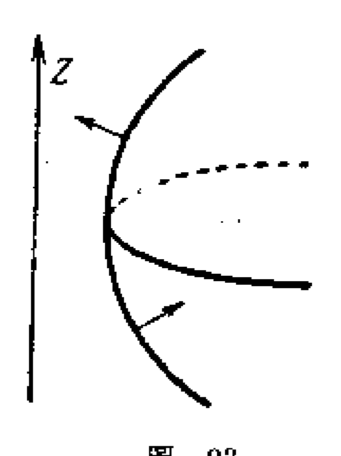


圖 93

為了使得這個新定義更加具體，我們作為一個例子再回過來從頭考慮$\mathscr{S}$是一個球面時的情形，科學的歷史清楚地告訴我們，在這個情形，對於極大多數與§126中(2)這種形式的積分相聯系的實際問題來說，都最好是或者把每一點的法線方向都取成向外的，或者都取成向內的（也就是說，或者處處都取所謂外法線，或者都取所謂內法線)。為了確定起見，我們取外法線，也就是說，我們算作§126的積分(2)中的γ，是球面$\mathscr{S}$在點(x,y,z)的外法線與OZ軸的正方向之間的夾角。於是，在上半球面$\mathscr{S}_1$的點上角γ是銳角，在赤道的點上γ是直角，而在下半球面$\mathscr{S}_2$的點上γ則是鈍角。因此，如果

把 $\iint\limits_{\mathscr{S}_1} F\,dx\,dy$ 與 $\iint\limits_{\mathscr{S}_2} F\,dx\,dy$ 了解爲 § 126 中所定義的，沿着"最簡單的"曲面塊 $\mathscr{S}_1$ 與 $\mathscr{S}_2$ 的曲面積分，則在角 γ 的新的意義之下

$$\iint\limits_{\mathscr{S}_1} F\cos\gamma\,d\sigma=\iint\limits_{\mathscr{S}_1} F\,dx\,dy,$$

$$\iint\limits_{\mathscr{S}_2} F\cos\gamma\,d\sigma=-\iint\limits_{\mathscr{S}_2} F\,dx\,dy,$$

因而按照曲面積分的推廣了的定義（§ 126 公式(2)）

$$\iint\limits_{\mathscr{S}} F\,dx\,dy=\iint\limits_{\mathscr{S}} F\cos\gamma\,d\sigma=\iint\limits_{\mathscr{S}_1} F\cos\gamma\,d\sigma+\iint\limits_{\mathscr{S}_2} F\cos\gamma\,d\sigma=$$

$$=\iint\limits_{\mathscr{S}_1} F\,dx\,dy-\iint\limits_{\mathscr{S}_2} F\,dx\,dy, \tag{2}$$

（這裏，我們提醒一下，等式右端的兩個積分都是 § 126 的原始意義之下的積分）。這時，角 γ 的定義是這樣的，在球面所有的點上法線的方向都是向外的，所以在上半球面的點上 $\cos\gamma>0$，而在下半球面的點上 $\cos\gamma<0$。我們把這樣定義的積分 (2) 稱爲一個**展佈在球面** $\mathscr{S}$ **的外側**的積分。當然，對於球面所有的點我們也可以不取外法線而取內法線；於是我們就得到**展佈在球面** $\mathscr{S}$ **的內側**的積分(2)；因爲由內法線轉變到外法線時，$\cos\gamma$ 在球面 $\mathscr{S}$ 的每一點上都改變符號，所以上述兩個積分只是在符號上不同而已。

當曲面塊 $\mathscr{S}$ 是我們在 § 126 中所詳細考慮過的那種形式（也就是說，$\mathscr{S}$ 可以表作 § 126 中(1)式那種形式的方程）時，我們的事情還要更簡單一些。我們曾經選好了法線向上的方向($\cos\gamma>0$)，並且證明了，

$$\iint\limits_{\mathscr{S}} F\,dx\,dy=\iint\limits_{\mathscr{S}} F\cos\gamma\,d\sigma.$$

根據我們現在的新觀點，我們把這個積分說成是**展佈在曲面塊** $\mathscr{S}$ **的上**

側的積分。反之，如果我們處處都取法線向下的方向，則積分

$$\iint_{\mathscr{S}} F \cos\gamma \, d\sigma \tag{3}$$

就改變符號；於是這個積分就成爲展佈在曲面塊 $\mathscr{S}$ 的下側的積分。我們看到，(3) 式這個記法本身並沒有說明究竟是展佈在曲面 $\mathscr{S}$ 的那一側積分；這在每一次都需要特別申明。

現在我們回到一般情形。不管 $\mathscr{S}$ 是封閉曲面（像球面那樣）或是有確定邊界（邊緣）的曲面塊，在絕大多數情形我們都不難區分曲面的兩"側"，就像我們在上述兩個例子裏所看到的那樣。給出曲面的確定的一側，等於給出在曲面的每一點上的法線方向。

如果選定了曲面的一側，則根據定義，展佈在曲面這一側的曲面積

$$\iint_{\mathscr{S}} F \, dx \, dy$$

就等於積分

$$\iint_{\mathscr{S}} F \cos\gamma \, d\sigma,$$

其中 γ 是我們所選定的法線方向與 OZ 軸的正方向之間的夾角。

但是，如果我們希望我們推廣後的定義能够包括足够廣的一類曲面，我們還應該稍微詳細地談一談，我們剛才所說的曲面的兩"側"在一般情形究竟是什麼；這個問題甚至在不是什麼高深的情形也可能發生一定的困難的。

現在假定，我們所感興趣的曲面（或曲面塊）$\mathscr{S}$ 在每一點都有切面，並且切面的方向隨着曲面上點的連續移動而連續變化。我們上面曾經說過，爲要選擇曲面的確定的一側只要在曲面的每一點上選定法線的方向就行了。但是，如果在曲面 $\mathscr{S}$ 的不同的點上我們所選擇的法線方向是彼此不相干的話，那末，一般說來，我們就得不到任何有用的

結果，因為：在這樣的選擇之下，角 γ 雖然是曲面上點的函數，但它可能到處都不連續，從而包含 $\cos\gamma$ 的積分也就沒有什麼意義。不論是這些形式上的理由或是直觀上的理由，都很清楚地告訴我們，在曲面的不同的點上，只有把法線的方向能够選得來使得當點在曲面上運動時，法線的方向連續地變化才有意義；換句話說，我們要求角 γ 是與它相關的點的座標的連續函數。

現在我們在曲面 $\mathscr{S}$ 上任取一點 A，引曲面在這一點上的法線，然後在這個法線的兩個可能的方向中選定一個。讓點 A 在曲面上沿着一條連續的道路移動，並且在點 A 經過的每一點上都引曲面的法線，在這些法線上，我們選定點 A 沿道路移動到該點時法線方向保持連續的那個方向。我們假定，動點就這樣經過某一條道路又回到原來的點 A。動點的法線將以那一個方向回到原來的點呢——以我們出發時的方向，還是以正好相反的方向回到點 A 呢？不難看出，無論是在我們以前所考慮過的例子裏，或是在絕大多數我們能够想像到的其他情形，法線方向總是以出發時的方向回到原來的點 A 的（在這裏必須事先假定點所經過的道路不跨過曲面 $\mathscr{S}$ 的邊緣）。然而，這個規則並不是對於所有的曲面都成立的；例如，我們考慮著名的"墨比烏斯帶"，它的模型可以用如下的方法來得到：把一塊長方形的紙條 $abcd$（圖 94）扭轉 180° 再沿 ad 與 bc 兩邊粘起來，使得 a 與 c 重合，b 與 d 重合。不難驗證，如果我們在這條帶子上任取一點 A，然後從 A 出發沿整個帶子按前面所說的方式移動，法線的方向並不是以原來的方向，而是以相反的方向回到點 A。在以後的討論中，我們永遠不考慮這種（在實際問題中幾乎遇不到的）曲面，因而我們總是假定，不管怎樣取起點，也不管經過那一條不跨過曲面邊緣的連續道路，只要我們連續地改變法線的方向，我們總是以原來的法線方向回到原來的出發點。

在這些條件之下，我們不難看出，要確定曲面 $\mathscr{S}$ 在每一點的法線方向，只要選定曲面 $\mathscr{S}$ 在某一點 A 的法線方向就够了。事實上，如果

B是曲面上另外的任意一點，則經過兩條不同的道路 $\mathscr{L}_1$ 與 $\mathscr{L}_2$ 從 A 到 B 都以同一個法線方向到達點 B，因為，不然的話，只要從點 B 出發首先倒過來經過道路 $\mathscr{L}_1$ 到達點 A，然後再經過道路 $\mathscr{L}_2$ 回到點 B，我們就要在點 B 得到與出發時相反的法線方向；但是根據我們的假定，這是不可能的。



圖 94

因此，對於我們所考慮的這種類型的曲面，在某一個點上法線方向的選擇就唯一決定了在曲面上所有其他點上的法線方向，也就是說，唯一決定了曲面的一側；如果我們在該點上選擇相反的法線方向，則曲面所有其他點上的法線方向也都隨着改變，從而曲面也就從一側轉到另外一側。因此，我們所考慮的這種類型的曲面可以稱為雙側的曲面（以示區別於墨比烏斯帶那樣的所謂單側的曲面）。

明確了這些以後，我們現在可以回到沿曲面給定的一側所取的積分的定義了。假定$\mathscr{S}$是一個雙側曲面（或雙側曲面塊），在它上面我們已經選定了確定的一側。假定 $\gamma=\gamma(x,y,z)$是 OZ 軸的正方向與（由我們所選定的一側所決定的）曲面$\mathscr{S}$在點 (x,y,z) 的法線方向之間的夾角；於是，作為定義，我們令

$$\iint_{\mathscr{S}} F\,dx\,dy=\iint_{\mathscr{S}} F\cos\gamma\,d\sigma,$$

這裏我們假定右端的積分存在，這個積分的定義就是 § 126 中我們詳細描述過的那種確定形式的和的極限。這種記法並沒有指出我們所選擇的是曲面的那一側；因此，要指出這一點，在每一次都必須特別說明。不過，如果$\mathscr{S}$是一個封閉曲面時，習慣上總是把上面所寫的這個積分了解作沿曲面的外側所取的積分（並且以後我們也總是這樣了解），因此，γ 就是曲面$\mathscr{S}$的外法線與 OZ 軸的正方向之間的夾角。

我們最好再來看一看，曲面積分的這個推廣了的定義與 § 126 中所引進的對於最簡單情形的原始定義究竟是怎樣聯系着的。假定曲面

$\mathscr{S}$可以分成有限塊"最簡單的"曲面塊 $\mathscr{S}_1, \mathscr{S}_2, \cdots, \mathscr{S}_n$，換句話說，分成的這些曲面塊可以表作 § 126 中(1)式那種形式的方程（這是在實際上最常遇到的情形）。根據推廣後的定義，沿曲面$\mathscr{S}$給定的那一側的積分等於沿所有分成的曲面塊的同一側的積分之和，因爲，顯然有：

$$\iint\limits_{\mathscr{S}} F\cos\gamma\,d\sigma=\sum_{i=1}^{n}\iint\limits_{\mathscr{S}_i} F\cos\gamma\,d\sigma.$$

如果在曲面塊 $\mathscr{S}_i$ 上，$\cos\gamma>0$，也就是說，如果我們選定的 $\mathscr{S}$ 的那一側在 $\mathscr{S}_i$ 這一塊上是上側，則沿 $\mathscr{S}_i$ 的積分就是 § 126 中所定義的那個積分；在 $\cos\gamma<0$ 的情形，這兩個積分的絕對値相等，只是符號相反。因此，沿曲面給定的一側的積分就等於沿它所分成的所有的最簡單的曲面塊（按照 § 126 的意義所定義）的積分的代數和；在這裏，我們所選擇的曲面$\mathscr{S}$的一側在有些曲面塊上表現爲上側，那末沿這些曲面塊的積分就都取"＋"號，而沿表現爲下側的那些曲面塊的積分則都取"－"號。

最後，上面所說的關於變量 (x, y) 的積分的全部事實，顯然對於變量(z, x)或(y, z)也都成立。對於沿雙側曲面給定的一側的積分，我們得到了下面的(作爲定義的)一般公式

$$\iint\limits_{\mathscr{S}}(P\,dy\,dz+Q\,dz\,dx+R\,dx\,dy)=$$

$$=\iint\limits_{\mathscr{S}}(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\,d\sigma, \qquad (4)$$

其中 P, Q, R 在某一個包含$\mathscr{S}$的空間區域內是 x, y, z 的連續函數，而 α, β, γ 分別是 OX, OY, OZ 的正方向與曲面$\mathscr{S}$在點(x, y, z) 的法線方向（這個方向是由所選定的曲面$\mathscr{S}$的側所決定的）之間的夾角。

在本章以後的全部討論中，我們總是把所遇到的曲面積分了解爲（按照剛才建立的定義所規定的）展佈在曲面的確定的一側的積分。

爲了防止某些混亂，我們最後還要作一點說明。在 § 120 中我們定義了展佈在一個給定的曲面塊 $\mathscr{S}$ 上的積分

$$\iint\limits_{\mathscr{S}} \varphi(x, y, z) d\sigma \tag{5}$$

的概念。這個概念與展佈在一個平面區域上的通常的重積分的概念是非常類似的：跟重積分的情形一樣，要建立積分(5)，我們先把曲面塊 $\mathscr{S}$ 分成有限個小塊，把每一個小塊的面積乘上函數 φ 在該小塊的某點上的值，然後再求所有這些乘積之和的極限。因此，積分(5)是作爲我們非常熟悉的，在積分學裏很典型的一種結構的結果而出現的。

在本節中，我們又定義了展佈在給定的曲面 $\mathscr{S}$ 的確定的一側的曲面積分

$$\iint\limits_{\mathscr{S}} F(x, y, z)\, dx\, dy \tag{6}$$

的概念，現在就發生了這樣一個問題：這兩種類型的積分彼此之間有什麼關係呢？根據前面所說的，我們就可以得到這個問題的完全明確的答案。符號(5)與(6)有着不同的意義；積分(5)只依賴於曲面塊與函數 φ 而完全不依賴於曲面的"側"的選擇，但積分(6)當所選擇的曲面的側改變時却要改變符號；只有當曲面的側選定以後，積分(6)才有確定的意義；因此，我們可以說，符號(6)在選擇曲面 $\mathscr{S}$ 不同的側時是兩個不同的積分。

§ 127 的練習可以參看 Б. П. 捷米多維奇的習題集，第八章，習題 403, 405.

§ 128. 奧斯特洛格拉得斯基公式

在 § 123 中我們引進了在理論與實用方面都非常重要的格林公式，這個公式使得展佈在一個平面區域上的重積分與沿着該區域的邊界所取的某一個曲線積分發生了聯系。在三維空間中也有這樣一個相

當的公式，其重要性也有如格林公式；這個公式由 M. B. 奧斯特洛格拉得斯基首先得到，它使得展佈在一個三維空間區域上的三重積分與展佈在該區域邊界的外側的某一個曲面積分發生聯系。

假定在三維空間中有一個封閉曲面 $\mathscr{S}$ 圍成一個區域 $\mathscr{V}$。我們先姑且假定，這個曲面具有最可能簡單的形式：每一條與任何一個座標軸平行的直線都至多與曲面相交於兩點；於是，特別說來，曲面 $\mathscr{S}$ 可以分成分別由方程 $z=f_1(x,y)$ 與 $z=f_2(x,y)$ 表出的"上""下"兩部分；我們再假定，函數 f_1 與 f_2 都連續，並且具有連續的(對 x 與 y 的)偏導數。最後，假定函數 $R(x,y,z)$ 與它的偏導數 $\frac{\partial R}{\partial z}$ 都在某一個內部包含 $\mathscr{V}$ 的空間區域上確定並且連續。我們來考慮三重積分

$$\iiint\limits_{\mathscr{V}} \frac{\partial R}{\partial z}\,dx\,dy\,dz\,.$$

根據 § 119 的公式(2)，這個積分可以表成

$$\iint\limits_{\mathscr{D}} \left\{ \int\limits_{f_2(x,y)}^{f_1(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z}\,dz \right\} dx\,dy,$$

其中 $\mathscr{D}$ 是區域 $\mathscr{V}$ 在平面 XOY 上的投影。但是

$$\int\limits_{f_2(x,y)}^{f_1(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z}\,dz = R[x,y,f_1(x,y)] - R[x,y,f_2(x,y)]\,;$$

因此我們得到：

$$\iiint\limits_{\mathscr{V}} \frac{\partial R}{\partial z}\,dx\,dy\,dz =$$

$$= \iint\limits_{\mathscr{D}} R\,[x,y,f_1(x,y)]\,dx\,dy - \iint\limits_{\mathscr{D}} R[x,y,f_2(x,y)]\,dx\,dy.$$

我們來考慮等式右端的第一個積分。根據曲面積分的定義，這個積分是函數 $R(x,y,z)$ 展佈在曲面 $\mathscr{S}$ 的上半部 $\mathscr{S}_1\,[z=f_1(x,y)]$ 的上

側(與$\mathscr{S}$的外側相合)的積分。同理，第二個積分是函數$R(x, y, z)$展佈在曲面$\mathscr{S}$的下半部$\mathscr{S}_2[z=f_2(x, y)]$的上側所取的積分；但在這種情形下，如我們所知道的，這個積分如果加上一個負號(實際上，在我們的公式裏它恰好帶一個"－"號)就成爲函數R沿曲面$\mathscr{S}_2$的下側(也跟曲面$\mathscr{S}$的外側相合)的積分。因此，我們得到：

$$\iiint\limits_{\mathscr{V}} \frac{\partial R}{\partial z}\, dx\, dy\, dz = \iint\limits_{\mathscr{S}_1} R\, dx\, dy + \iint\limits_{\mathscr{S}_2} R\, dx\, dy,$$

其中等式右端的第一個積分是沿曲面$\mathscr{S}_1$的上側所取的積分，而第二個積分是沿曲面$\mathscr{S}_2$的下側所取的積分。因爲在這兩個積分裏，積分都是沿着曲面$\mathscr{S}$的外側進行的，所以等式右端的兩個積分之和可以用沿整個曲面$\mathscr{S}$的外側所取的一個積分來代替，從而我們得到了下列的簡單關係：

$$\iiint\limits_{\mathscr{V}} \frac{\partial R}{\partial z}\, dx\, dy\, dz = \iint\limits_{\mathscr{S}} R\, dx\, dy = \iint\limits_{\mathscr{S}} R \cos\gamma\, d\sigma; \qquad (1)$$

這些等式中的第二項與第三項都是沿曲面$\mathscr{S}$的外側的積分。爲了推出這個關係式，我們曾經假定，平行於OZ軸的直線與封閉曲面$\mathscr{S}$至多只交於兩點；其實，不難驗證，這個關係式對於更多得多的曲面也還是對的。爲此目的，我們首先注意，如果曲面$\mathscr{S}$的組成部分除$\mathscr{S}_1$與$\mathscr{S}_2$外，還有一部分是一個母線平行於OZ軸的柱面$\mathscr{S}^*$(圖95)，則關係式(1)仍然成立；事實上，在柱面$\mathscr{S}^*$的點上法線顯然與OZ軸成直角，換句話說，$\cos\gamma=0$，因而我們永遠有：

$$\iint\limits_{\mathscr{S}^*} R\, dx\, dy = \iint\limits_{\mathscr{S}^*} R \cos\gamma\, d\sigma = 0,$$

所以，跟前面一樣

$$\iint\limits_{\mathscr{S}_1} R\, dx\, dy + \iint\limits_{\mathscr{S}_2} R\, dx\, dy =$$

$$= \iint\limits_{\mathscr{S}_1} R\, dx\, dy + \iint\limits_{\mathscr{S}_2} R\, dx\, dy + \iint\limits_{\mathscr{S}^*} R\, dx\, dy = \iint\limits_{\mathscr{S}} R\, dx\, dy,$$

換句話說，公式(1)仍然成立。

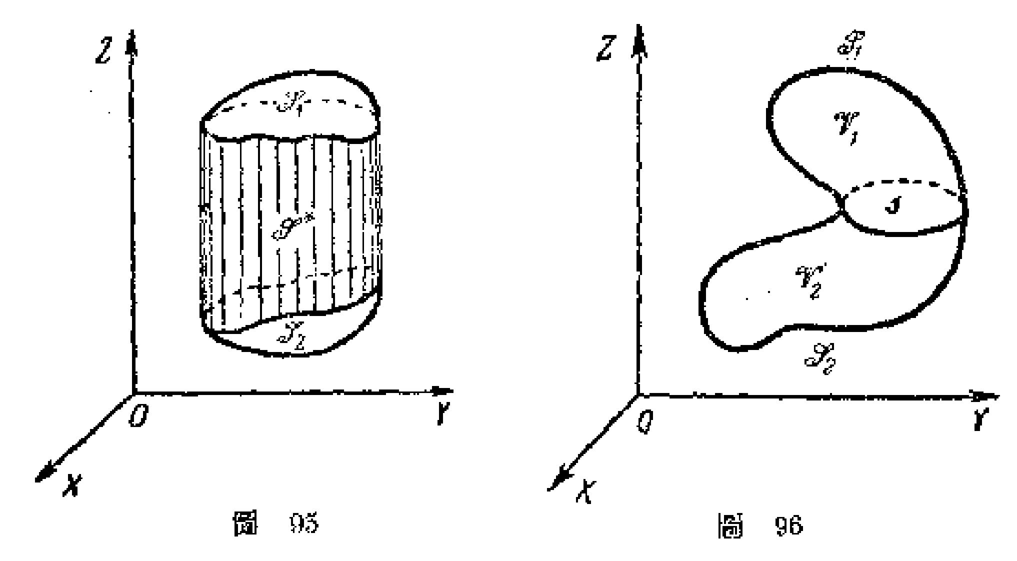


圖 95　　圖 96

其次，我們來證明，如果區域$\mathscr{V}$可以用包含在它內部的曲面塊s分成$\mathscr{V}_1$與$\mathscr{V}_2$兩部分，又對於這兩部分關係式(1)都成立，則這個關係式對於整個區域$\mathscr{V}$也要成立。事實上，我們顯然有：

$$\iiint\limits_{\mathscr{V}} \frac{\partial R}{\partial z}\, dx\, dy\, dz = \iiint\limits_{\mathscr{V}_1} \frac{\partial R}{\partial z}\, dx\, dy\, dz + \iiint\limits_{\mathscr{V}_2} \frac{\partial R}{\partial z}\, dx\, dy\, dz =$$

$$= \iint\limits_{\mathscr{S}_1} R\, dx\, dy + \iint\limits_{\mathscr{S}_2} R\, dx\, dy\,,$$

其中$\mathscr{S}_1$與$\mathscr{S}_2$分別是圍成$\mathscr{V}_1$與$\mathscr{V}_2$的封閉曲面，又等式右端的兩個積分都是沿相應的曲面的外側取的。但是$\mathscr{S}_1$是由曲面$\mathscr{S}$的某一部分與曲面塊s組成的，又$\mathscr{S}_2$是由曲面$\mathscr{S}$餘下的部分與同一曲面塊s組成的；因此，等式右端的兩個積分之和就等於沿曲面$\mathscr{S}$的外側的積分與沿曲面塊s的兩個積分之和；後面這兩個積分中，一個是沿曲面塊s相應於曲面$\mathscr{S}_1$的外側的那一側的積分，而另一個是沿相應於曲面$\mathscr{S}_2$的外側那一側的積分；很明顯，這兩側正好是曲面塊s的正好相反的兩側，因而沿這兩側所取的積分之和等於零，於是我們得到了：

$$\iiint\limits_{\mathscr{V}} \frac{\partial R}{\partial z}\, dx\, dy\, dz = \iint\limits_{\mathscr{S}} R\, dx\, dy\,,$$

這就是我們想要證明的。

利用以上證明的這個定理，我們顯然可以大大地擴充公式(1)應用的範圍，因為在應用裏所遇到的絕大多數空間區域，都可以用一些適當的曲面塊把它們分成若干已經證明公式(1)成立的那種最簡單的區域。

當然，如果我們把變量對(x, y)用(y, z)或(z, x)來代替，前面所說的一切還是同樣成立。如果函數$P=P(x, y, z)$，$Q=Q(x, y, z)$，$R=R(x, y, z)$都在某一個內部包含(以$\mathscr{S}$為邊界的)區域$\mathscr{V}$的更大的空間區域上連續並且有連續偏導數，則對於非常廣泛的一類這種區域$\mathscr{V}$，我們都有：

$$\iiint\limits_{\mathscr{V}}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz=$$

$$\iint\limits_{\mathscr{S}}(P\,dy\,dz+Q\,dz\,dx+R\,dx\,dy),\qquad(2)$$

這裏右端的積分是沿曲面$\mathscr{S}$的外側取的。顯然，我們也可以把這個關係式寫成

$$\iiint\limits_{\mathscr{V}}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz=$$

$$\iint\limits_{\mathscr{S}}(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)d\sigma,\qquad(3)$$

其中α, β, γ分別是曲面$\mathscr{S}$在點(x, y, z)的外法線與OX, OY, OZ軸之間的夾角。

公式(2)(或(3))就是我們前面所說的奧斯特洛格拉得斯基公式❶。這個公式在物理的許多部分都有着重要的意義，因為在實質上它是場論中最重要的定理之一，這一點我們以後還要談到，現在，我們

❶ 有時也稱為高斯公式或高斯—奧斯特洛格拉得斯基公式。

來利用奧斯特洛格拉得斯基公式證明一個對於許多物理問題都很重要的定理；這個定理完全類似於我們在 § 124 中利用格林公式證明的那個相應的定理。

定理　沿區域 $\mathscr{V}$ 內的任何封閉曲面 $\mathscr{S}$ [1] 所取的積分

$$\iint_{\mathscr{S}} (P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\,d\sigma$$

都等於零的必要充分條件是，在區域 $\mathscr{V}$ 的每一個內點上關係式

$$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=0. \tag{4}$$

都成立。

證明. 條件(4)的充分性從公式(3)立刻就可以看出來。要想證明它的必要性，我們假定，比方說，在區域 $\mathscr{V}$ 內某一點 A 上有：

$$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}>0.$$

由於我們所假定的偏導數的連續性，這個不等式在以 A 爲中心整個包含在區域 $\mathscr{V}$ 內的某一個球 w 的內部以及它的邊界上也都要成立，從而我們就會得到：

$$\iiint_{w}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz>0.$$

但是這樣一來，公式(3)就告訴我們，對於球 w 的表面 s，我們有：

$$\iint_{s} (P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\,d\sigma>0.$$

這個矛盾就證完了我們的定理。

§ 128 的練習可以參看 Б. П. 捷米多維奇的習題集，第八章，習題 415, 416, 423, 424。

---

[1] 當然，這裏指的是使奧斯特洛格拉得斯基公式成立的那種曲面；其實，這類曲面 $\mathscr{S}$ 還可以範圍狹窄很多，這個定理也還是成立的；比方說，可以算作，我們談到的只是球面。

§ 129. 司鐸克斯公式

我們在上節中導出的奧斯特洛格拉得斯基公式可以看作是平面上的格林公式在三維空間中的翻版。現在我們再來導出另外一個同樣重要的公式，這個公式是格林公式的直接推廣(用曲面塊來代替格林公式中的平面圖形)。這個公式把沿着某一個曲面塊$\mathscr{S}$的確定的一側所取的積分與沿着圍成$\mathscr{S}$的閉曲線$\mathscr{L}$所取的某一個空間曲線積分聯系起來，換句話說，這個公式對於曲面所解决的問題正是格林公式對於平面所解决的那個問題。

我們首先假定給定的曲面在$\mathscr{S}$這一塊上可以表作方程$z=f(x, y)$；關於函數f，以及下面就要引進的(變量x, y, z的)函數P, Q, R，我們都假定它們滿足通常的關於連續性與可微性的那些條件。我們從考慮按正方向沿曲面塊$\mathscr{S}$的邊界$\mathscr{L}$所取的空間曲線積分

$$\int_{\mathscr{L}} P(x, y, z)\, dx, \tag{1}$$

開始(這裏所謂$\mathscr{L}$的正方向是指當一個人在曲面塊$\mathscr{S}$的上側沿$\mathscr{L}$運動時$\mathscr{S}$永遠在他左邊的那個方向)。假定曲面塊$\mathscr{S}$在XOY平面上的投影是平面區域s，它的邊界記作l；於是積分(1)就可以表作沿閉曲線l所取的一個平面曲線積分

$$\int_{l} P[x, y, f(x, y)]\, dx; \tag{2}$$

事實上，假定l'是l上表作方程

$$y=\varphi(x) \quad (a\leqslant x\leqslant b)$$

的那一段；於是閉曲線$\mathscr{L}$上垂直投影成l'的那一段$\mathscr{L}'$顯然具有方程：

$$y=\varphi(x), \quad z=f[x, \varphi(x)],$$

因而按曲線積分的原始定義我們有：

$$\int_{\mathscr{L}'} P(x, y, z)\, dx = \int_a^b P\{x, \varphi(x), f[x, \varphi(x)]\}\, dx,$$

$$\int_{l'} P[x, y, f(x, y)]\, dx = \int_a^b P\{x, \varphi(x), f[x, \varphi(x)]\}\, dx;$$

這兩個等式的右端完全一樣，因而左端也就相等，這就證明了我們的斷言對於“最簡單的”曲線段 l' 與 $\mathscr{L}'$ 是成立的；因此只要假定閉曲線 $\mathscr{L}$（因而 l）可以分成有限段這種最簡單的曲線段，我們就立刻知道：

$$\int_{\mathscr{L}} P(x, y, z) dx = \int_{l} P[x, y, f(x, y)]\, dx. \tag{3}$$

這個等式對於某種更一般的曲線 $\mathscr{L}$ 還可以成立，不過這裏我們不講它了。

另一方面，我們考慮沿曲面 $\mathscr{S}$ 的上側所取的積分

$$\left.\begin{aligned} \iint_{\mathscr{S}} \frac{\partial P}{\partial y}\, dx\, dy &= \iint_{\mathscr{S}} \frac{\partial P}{\partial y} \cos\gamma\, d\sigma, \\ \iint_{\mathscr{S}} \frac{\partial P}{\partial z}\, dx\, dz &= \iint_{\mathscr{S}} \frac{\partial P}{\partial z} \cos\beta\, d\sigma, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

其中 γ 與 β 的意義跟前面一樣。根據 § 99 的公式我們有：

$$\cos\beta = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial y}}{\pm\sqrt{\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1}},$$

$$\cos\gamma = \frac{1}{\pm\sqrt{\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1}},$$

這裏，兩個分式的分母應該取同樣的符號。因爲我們選擇的是曲面 $\mathscr{S}$ 的上側，所以在這裏 $\cos\gamma > 0$，因而根式應該取正號；此外，不管怎麼

樣，我們都有：

$$\cos\beta=-\frac{\partial f}{\partial y}\cos\gamma,$$

從而，公式(4)給出：

$$\iint_{\mathscr{S}}\left(\frac{\partial P}{\partial y}dx\,dy-\frac{\partial P}{\partial z}dz\,dx\right)=\iint_{\mathscr{S}}\left(\frac{\partial P}{\partial y}+\frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial y}\right)\cos\gamma\,d\sigma=$$

$$=\iint_{\mathscr{S}}\left(\frac{\partial P}{\partial y}+\frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial y}\right)dx\,dy.$$

這裏，後面一個積分的被積函數中，如果用$f(x,y)$來代替z，顯然就等於

$$\frac{\partial}{\partial y}\{P[x,y,f(x,y)]\};$$

因此，根據最簡單情形的曲面積分定義，這個積分就可以寫成二重積分的形式：

$$\iint_{\Delta}\frac{\partial}{\partial y}\{P[x,y,f(x,y)]\}\,dxdy,$$

因而我們已經得到：

$$\iint_{\mathscr{S}}\left(\frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy-\frac{\partial P}{\partial z}\,dz\,dx\right)=\iint_{\Delta}\frac{\partial}{\partial y}\{P[x,y,f(x,y)]\}\,dx\,dy.\qquad(5)$$

比較一下公式(3)與公式(5)，我們立刻看出，這兩個等式的右端根據格林公式只相差一個符號。因此，它們的左端也只相差一個符號，換句話說，我們得到了：

$$\iint_{\mathscr{S}}\left(\frac{\partial P}{\partial z}dz\,dx-\frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy\right)=\int_{\mathscr{L}}P(x,y,z)\,dx.\qquad(6)$$

在這裏，等式左端的積分是沿曲面$\mathscr{S}$的上側取的，而右端的積分則是沿着曲線$\mathscr{L}$的正方向(當一個人在曲面塊$\mathscr{S}$的上側沿$\mathscr{L}$運動時$\mathscr{S}$永遠在他的左邊的那一個方向)取的。如果我們改變所選定的$\mathscr{S}$的

側，同時也改變閉曲線 $\mathscr{L}$ 的方向，則等式(6)的兩端都改變符號，所以這個等式仍舊成立；不難看出，在這種情形，如果一個人站在我們新選定的曲面 $\mathscr{S}$ 的這一側(下側)，並且按着新的方向(改變以後的方向)沿閉曲線 $\mathscr{L}$ 運動，曲面塊 $\mathscr{S}$ 還是永遠在他的左邊。因此，這個規則具有完全一般性的品格，從而，只要選定曲面 $\mathscr{S}$ 的一側，按照這個規則，沿閉曲線 $\mathscr{L}$ 的運動方向就跟着唯一地確定了(反過來也一樣)。

跟格林公式或奧斯特洛格拉得斯基公式一樣，公式(6)也具有這樣的性質：如果把曲面塊 $\mathscr{S}$ 用在它上面的曲線分成 $\mathscr{S}_1$ 與 $\mathscr{S}_2$ 兩部分，又如果對於這兩部分公式(6)都成立，則這個公式對於整個曲面塊 $\mathscr{S}$ 也就成立(這個斷言的證明跟格林公式的情形完全一樣，所以我們留給讀者自己去作)。根據這個性質，公式(6)的眞確性(也跟格林公式以及奧斯特洛格拉得斯基公式的情形一樣)可以對更廣的一類曲面建立起來。

把字母 x, y, z 以及 P, Q, R 同時作一樣的輪換，就給出除公式(6)外的另外兩個公式：

$$\iint\limits_{\mathscr{S}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} dy\, dx - \frac{\partial Q}{\partial z} dy\, dz \right) = \int\limits_{\mathscr{L}} Q(x, y, z)\, dy,$$

$$\iint\limits_{\mathscr{S}} \left(\frac{\partial R}{\partial y} dz\, dy - \frac{\partial R}{\partial x} dz\, dx \right) = \int\limits_{\mathscr{L}} R(x, y, z)\, dz.$$

最後，把這三個公式加起來，我們就得到一般的**司鐸克斯公式**：

$$\iint\limits_{\mathscr{S}} \left\{ \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\, dy + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy\, dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz\, dx \right\} =$$

$$= \int\limits_{\mathscr{L}} (P\, dx + Q\, dy + R\, dz), \tag{7}$$

這個公式就是我們所要的結論。

這個公式，我們已經說過，是格林公式的一個推廣：如果 $\mathscr{S}$ 是

XOY 平面上的一塊，則，不難看出，司鐸克斯公式就蛻變成格林公式，因此，格林公式實際上是司鐸克斯公式的一個特殊情形。

在司鐸克斯公式的許多應用中，我們現在只提出一個來談一談。在 § 125 裏我們還有一個引理留下來沒有證明，那就是：如果在三維空間的某一個區域 $\mathscr{V}$ 的每一點上，都有等式

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial z} \tag{8}$$

成立，則沿着任何一條完全屬於 $\mathscr{V}$ 的光滑閉曲線 $\mathscr{L}$ 的曲線積分

$$\int_{\mathscr{L}}(P\,dx+Q\,dy+R\,dz)$$

都等於零。這個命題的證明可以從司鐸克斯公式立刻得到，只要對於區域 $\mathscr{V}$ 內的任何封閉曲線 $\mathscr{L}$ 都有一個以它爲邊界的曲面 $\mathscr{S}$ 存在，使得司鐸克斯成立(這一點我們應該作爲命題的假設，其實，在絕大多數實際上常遇到的情形這些條件都是成立的)❶。因爲，從公式(8)可以推出，對於區域 $\mathscr{V}$ 內的任何封閉曲線 $\mathscr{L}$，司鐸克斯公式左端的積分都等於零，因而，它的右端也等於零，這就證明了我們所需要的引理。

§ 130. 場論初步

曲線積分與曲面積分在力學與物理上的全部應用具有一個共同的格式來作爲它們的數學基礎，在個格式通常稱爲場論(場的理論)。這個理論的初步實質上在前面幾章中已經談到了。但是，對於場論的絕大多數的概念與關係，力學與物理學有充分的理由要求我們使用另外更直觀的術語；而且這些概念與關係通常都要用向量的形式來表達；因爲這

❶ 對於曲面 $\mathscr{S}$ 不存在的情形，我們還是應該舉一個簡單的例子。假定曲線 $\mathscr{L}$ 是一個半徑爲 1 的圓周，而區域 $\mathscr{V}$ 是空間中所有與這個圓周的距離不超過 $\frac{1}{2}$ 的點的全體(這樣一個區域的表面稱爲“環面”)。於是，很明顯，沒有一個整個包含在區域 $\mathscr{V}$ 內而同時以圓周 $\mathscr{L}$ 爲邊界的曲面。

樣可以使得它們對於極大多數的力學與物理學的問題顯得更簡單，更直觀與更方便。因此我們現在要來在一個簡短的綱要中，把這些概念以及與這些概念相聯系的一些關係中最重要的那些收集在一起，我們要把它們表達成向量的形式，從而使得它們的直觀意義更容易瞭解❶。

1. 數量場與向量場　跟物理學與力學有關的量基本上可以分成兩類：數量，即由它的數值就可以完全確定的量（如密度，溫度，電位等），以及向量，這種量要想完全確定除了要給出它的數值外還要給出它的方向（如速度、加速度、力等）。不錯，在物理學中的確還有描述起來更複雜的量；不過在這裏我們不討論它們了。

如所周知，一個向量在某一個軸（有方向的直線）上的投影稱爲該向量沿這個軸的支量。下面我們總是把向量印成粗體字。我們把向量 $\boldsymbol{F}$ 的數值（非負的）記作 $|\boldsymbol{F}|$，而把它沿座標軸的三個支量分別記作 F_x, F_y, F_z。

如果我們有一個確定在空間（或空間的某一部分）的每一點上的數量 F，則這個量 F 在所有這些點上的值的全體稱爲一個數量場。顯然，給出一個數量場在實質上跟給出點的座標的一個函數 $f(x, y, z)$ 沒有任何分別。如果在空間（或空間的一部分）的每一點上都（按數值和方向）確定一個向量 $\boldsymbol{F}$，則我們得到的就是所謂向量場了；要想給出一個向量場，如所周知，只要在每一點上確定向量 $\boldsymbol{F}$ 的三個支量 F_x, F_y 與 F_z 就行了；因此，給出一個向量場就相當於給出空間中點座標的三個函數 $F_x(x, y, z)$, $F_y(x, y, z)$, $F_z(x, y, z)$。

2. 等量面與數量場的梯度　假定在空間（或空間的某一部分）給定了一個數量場 $F(x, y, z)$；以後我們總是假定，函數 F 在空間（或空間的已知部分）有連續的一級偏導數。方程

$$F(x, y, z)=C$$

（其中 C 是任意一個常數）一般說來確定了一個曲面，我們稱這個曲面

❶ 在這裏我們假定讀者已經很熟悉初步的向量代數。

是已知數量場的一個**等量面**；對應於每一個值 C 都有一個確定的等量面。非常清楚，通過空間（或空間的已知部分）的每一點都有一個並且只有一個已知數量場的等量面，因此，特別說來，兩個不同的等量面不可能有公共點（不相交）。

我們已經知道（§ 91），函數 $F(x, y, z)$ 在一個給定的點 (x, y, z) 沿着一個指定的方向 λ 的變化速度是由函數 F 沿該方向的導數 $D_\lambda F$（按絕對值與符號）來衡量的；關於這個導數（§ 91）有下列公式：

$$D_\lambda \boldsymbol{F} = \frac{\partial F}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial F}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial F}{\partial z}\cos\gamma,$$

其中 α，β 與 γ 分別是方向 λ 與座標軸 OX，OY 與 OZ 的正方向之間的夾角。

我們現在除數量場 $F(x, y, z)$ 外，同時來考慮由關係式

$$G_x = \frac{\partial F}{\partial x}, \quad G_y = \frac{\partial F}{\partial y}, \quad G_z = \frac{\partial F}{\partial z}$$

確定的向量場 $\boldsymbol{G}(x, y, z)$，我們有：

$$|\boldsymbol{G}(x, y, z)| = \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}.$$

向量 $\boldsymbol{G}(x, y, z)$ 稱為數量場 F（在給定的點 (x, y, z)）的**梯度**，記作 $\operatorname{grad} F$。根據向量代數中大家都知道的規則，量

$$D_\lambda F = G_x\cos\alpha + G_y\cos\beta + G_z\cos\gamma$$

是向量 $\boldsymbol{G}$ 在方向 λ 上的投影，換句話說，

$$D_\lambda F = |\boldsymbol{G}|\cos(\boldsymbol{G}, \lambda),$$

其中 $(\boldsymbol{G}, \lambda)$ 是梯度 $\boldsymbol{G}$ 的方向與方向 λ 之間的夾角。

如果我們來比較一下函數 F 在同一個點 (x, y, z) 處沿着不同方向 λ 的變化速度 $|D_\lambda F|$，則上面最後這個等式說明，在 $|\cos(\boldsymbol{G}, \lambda)| = 1$，也就是說，當方向 λ 與梯度的方向（或梯度的逆方向）相合時，這個速度最大。因此，在每一點上，**梯度的方向是給定的數量場在該點變化最快的那個方向；這個最大的變化速度等於**

$$|G|=\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}.$$

最後我們還要指出，因爲 $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$, $\frac{\partial F}{\partial z}$ 與曲面 $F(x, y, z)=C$ 在點(x, y, z)的法線的方向餘弦成比例，所以梯度的方向與通過點(x,y,z)的等量面在該點的法線方向相合。因此，梯度的數值 $|G|=|\text{grad } F|$ 可以由函數 F 沿等量面的法線方向的導數來測量；如果把這個導數記作 $\frac{\partial F}{\partial n}$, 我們就有：

$$|\text{grad } F|=\left|\frac{\partial F}{\partial n}\right|.$$

3. 向量場的發散量與通過一個給定的曲面的流量 假定在空間(或在空間的某一部分)給定了一個向量場 $\boldsymbol{F}(x, y, z)$。量

$$\text{div } \boldsymbol{F}=\frac{\partial F_x}{\partial x}+\frac{\partial F_y}{\partial y}+\frac{\partial F_z}{\partial z}$$

在實際應用中佔有很重要的地位，我們通常把這個量叫做向量場 $\boldsymbol{F}$ 在點(x, y, z)上的發散量。向量場在一個給定的點上的發散量是一個數量，因而它在空間中（或空間中我們所考慮的那一部分）的值的全體構成一個數量場。

我們現在轉來談一個給定的向量場通過一個給定的曲面的流量這個在力學與物理學的應用中非常重要的概念的定義。爲了使得這個概念更加直觀，我們先從流體力學的模型談起。假定在空間中我們所選擇的那一部分充滿着某種流動着的流體；假定在這個空間區域內我們取定了一個雙側的曲面 $\mathscr{S}$（不論是封閉曲面或者是以某一條閉曲線爲邊界的曲面都可以），然後我們按 § 127 的意義選好這個曲面的確定的一側。假定 $d\sigma$ 是這個曲面 $\mathscr{S}$ 的面積單元（很小的一塊面積）。如果用向量 $\boldsymbol{F}$ 來代表在一個給定的時刻，流體在單元 $d\sigma$ 的某一點的流動速度，則在很小的一段時間 dt 內，流體沿着我們選好的曲面的那一側的方向流過這個面積單元的量，顯然應該等於（精確到一個高級無窮小）以

$d\sigma$ 爲底以平行於向量 $\boldsymbol{F}$ 長度等於 $|\boldsymbol{F}|\,dt$ 的直線段爲母線的柱體內所容納的流體的量。這個柱體的體積顯然等於 $|F_n|\,dt\,d\sigma$，其中 F_n 是向量 $\boldsymbol{F}$ 在曲面塊 $d\sigma$ 的法線相應於我們選定的(曲面的)那一側的方向上的投影。因此在 dt 這一段時間內流過面積單元 $d\sigma$ 的流體的質量可以寫成

$$\rho F_n\,dt\,d\sigma,$$

其中 ρ 是流體的密度，又這裏我們算作流過的流體的質量是正的或者是負的，要看流體是流向我們所選擇的方向 ($F_n>0$) 或者是流向相反的方向 ($F_n<0$) 而定。因此在單位時間內流過面積單元 $d\sigma$ 的流體的質量就是：

$$\rho F_n\,d\sigma,$$

而在單位時間內流過整個曲面 $\mathscr{S}$ 的流體的質量就可以表成一個曲面積分

$$M=\iint\limits_{\mathscr{S}}\rho F_n\,d\sigma.$$

如果我們用 α,β,γ 分別代表我們選好的曲面 $\mathscr{S}$ 的法線方向與三個座標軸之間的夾角，則，顯然，根據向量代數的規則我們有：

$$F_n=F_x\cos\alpha+F_y\cos\beta+F_z\cos\gamma,$$

因而量 M (如果，爲簡單起見，假定 ρ 是常數)就可以寫成

$$M=\rho\iint\limits_{\mathscr{S}}(F_x\cos\alpha+F_y\cos\beta+F_z\cos\gamma)\,d\sigma.$$

因此我們完全有理由，把展佈在曲面 $\mathscr{S}$ 的確定的一側的曲面積分

$$\iint\limits_{\mathscr{S}}(F_x\cos\alpha+F_y\cos\beta+F_z\cos\gamma)\,d\sigma=\iint\limits_{\mathscr{S}}F_n\,d\sigma$$

就稱爲向量場 $\boldsymbol{F}(x,y,z)$ 在我們所選擇的曲面的那一側的方向上通過曲面 $\mathscr{S}$ 的流量。在以前我們曾不只一次地遇到過這種類型的積分。例如，在奧斯特洛格拉得斯基公式(3) (§ 128)中的積分就是這種類型的積分，只要我們把其中的 P,Q 與 R 了解爲某一個向量 $\boldsymbol{F}$ 沿座標軸的支

量 F_x, F_y 與 F_z(當然，這永遠是可以的)；如果我們再留意一下，§ 128 中公式 (3) 左端的被積函數顯然就是向量 $\boldsymbol{F}$ 的發散量，因此整個奧斯特洛格拉得斯基公式就可以寫成

$$\iiint\limits_{\mathscr{V}} \operatorname{div} \boldsymbol{F}\, dx\, dy\, dz = \iint\limits_{\mathscr{S}} F_n\, d\sigma,$$

這個寫法很簡單同時又表達得非常清楚。因此，從向量的觀點來說，這個公式的含義就是：向量場從一個封閉曲面的內部流出的流量等於這個場的發散量在該曲面所圍成的區域上的積分。特別說來，在§ 128 的末尾所證明的定理就可以這樣說：要想一個給定的向量場通過區域 $\mathscr{V}$ 內的任何封閉曲面的流量都等於零，其必要而且充分的條件是，在區域 $\mathscr{V}$ 內這個場的發散量恆等於零。

4. 向量場的循環量。旋轉向量。勢量場現在我們來驗明，司鐸克斯公式(§ 129)也可以得到簡單方便的向量解釋。這個公式 (§ 129 (7))的右端是積分

$$\int\limits_{\mathscr{L}} (P\, dx + Q\, dy + R\, dz),$$

根據 § 125 我們又可以把這個積分寫成

$$\int\limits_{\mathscr{L}} (P \cos a + Q \cos b + R \cos c)\, d\lambda,$$

其中 a, b, c 是曲線 $\mathscr{L}$ 的切線與座標軸的正方向之間的夾角。如果在討論中我們引進以

$$F_x = P, \quad F_y = Q, \quad F_z = R \tag{1}$$

爲支量的向量場 $\boldsymbol{F}(x, y, z)$，則被積函數顯然就是向量 $\boldsymbol{F}$ 在曲線 $\mathscr{L}$ 的切線上的投影 F_l，因而我們的積分可以寫成

$$\int\limits_{\mathscr{L}} F_l\, d\lambda.$$

這樣一個積分稱爲向量場 $\boldsymbol{F}$ 沿着閉曲線 $\mathscr{L}$ 的循環量；當然，F_l 應

該是向量F在沿着曲線$\mathscr{L}$進行的切線方向上的投影。

我們現在轉來看§129公式(7)的左端。根據§127的公式(4)我們知道，它是

$$\iint_{\mathscr{S}}\left\{\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma\right\}d\sigma,$$

其中角α,β,γ的意義照舊(當然，法線的方向應該相應於我們選定的曲面的側，就它本身來說，應該按我們所熟知的方式與公式右端的閉曲線$\mathscr{L}$的方向一致)。除了以(1)爲支量的向量場$F(x,y,z)$外，我們現在引進另外一個由它唯一確定的向量場$C(x,y,z)$，它的支量是函數

$$C_x=\frac{\partial F_z}{\partial y}-\frac{\partial F_y}{\partial z},\quad C_y=\frac{\partial F_x}{\partial z}-\frac{\partial F_z}{\partial x},\quad C_z=\frac{\partial F_y}{\partial x}-\frac{\partial F_x}{\partial y};$$

向量C稱爲向量場F的旋轉向量或旋轉度，它在流體力學中起着很重要的作用；向量C的值的全體稱爲(關於場F的)旋轉場。旋轉向量C常常記作$\operatorname{rot}F$("向量F的旋轉度(rotor)")。利用這些符號，上面所說的積分就可以寫成

$$\iint_{\mathscr{S}}(C_x\cos\alpha+C_y\cos\beta+C_z\cos\gamma)\,d\sigma=\iint_{\mathscr{S}}C_n\,d\sigma,$$

其中C_n是旋轉向量$C=\operatorname{rot}F$在曲面$\mathscr{S}$的相應於我們所選定的一側的法線方向上的投影。因此，司鐸克斯公式就可以改寫成

$$\iint_{\mathscr{S}}C_n\,d\sigma=\int_{\mathscr{L}}F_t\,d\lambda,$$

其中我們所選擇的曲面$\mathscr{S}$的側與閉曲線$\mathscr{L}$的方向應該按我們在§129中所熟知的規則彼此一致。因此，這個公式的向量解釋就是，旋轉場C通過以閉曲線$\mathscr{L}$爲邊界的曲面$\mathscr{S}$的流量等於已知向量場F沿閉曲線$\mathscr{L}$的循環量(其中流動的方向與閉曲線$\mathscr{L}$的方向應該按照我們規定的方式彼此相符合)。

作爲場論的一般定理的一個例子，我們現在把§129的末尾利用

司鐸克斯公式所證明的引理用向量的術語改述如下：如果在空間的某一個區域 $\mathscr{V}$ 上向量場 $\boldsymbol{F}$ 的旋轉場消失了(即在區域 $\mathscr{V}$ 的每一點上 $\operatorname{rot} \boldsymbol{F}=0$)，則向量場 $\boldsymbol{F}$ 沿着（可以作爲一個完全包含在 $\mathscr{V}$ 內的曲面塊的邊界的）任何封閉曲線的循環量都等於零。這個定理的逆定理也是成立的，這很容易從 § 125 的末尾所述的引理推出。

如果一個給定的向量場 $\boldsymbol{F}$ 的旋轉向量 $\operatorname{rot} \boldsymbol{F}$ 在某一個空間區域 $\mathscr{V}$ 的每一點上都等於零，則表明等式

$$\frac{\partial F_x}{\partial y}=\frac{\partial F_y}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_x}{\partial z}=\frac{\partial F_z}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_y}{\partial z}=\frac{\partial F_z}{\partial y}$$

在該區域上到處都成立；根據 § 125 的引理，這些等式的成立是表達式

$$F_x\, dx+F_y\, dy+F_z\, dz$$

是某一個函數 $U(x, y, z)$ 的微分的必要而且充分的條件，換句話說，有這樣一個函數 U 存在，使得

$$\frac{\partial U}{\partial x}=F_x, \quad \frac{\partial U}{\partial y}=F_y, \quad \frac{\partial U}{\partial z}=F_z\,. \tag{2}$$

當這樣一個函數存在時，我們就說它是向量場 $\boldsymbol{F}$ 的一個勢或者勢函數，而場 $\boldsymbol{F}$ 稱爲一個勢量場。最後，如果關係式(2)成立，則顯然就是說，向量 $\boldsymbol{F}$ 是由函數 U 所確定的數量場的梯度。因此，由前面的討論可知，勢量場，無旋轉場(即旋轉向量恆爲零的場)以及梯度場($\boldsymbol{F}=\operatorname{grad} U$)是相同的一些概念（至少對於足够簡單的區域來說是這樣）。特別說來，對於任何一個數量場 $U(x, y, z)$ 我們都有

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} U=0\,.$$

§ 130 的練習可以參看 Б. П. 捷米多維奇的習題集，第八章，習題 436, 438, 439, 452, 483.

結束語　歷史簡述

I

在十七世紀的時候，由於社會關係與經濟關係的發展所產生的實際需要，以及在整個人類活動中由技術的進步所引起的實際需要，對數學家提出了大量的新問題。在這些(主要是幾何學與力學方面的)問題中，很快地分離出來範圍很廣的一類問題，它們和大多數以往的數學問題有原則性的區別，要解决它們，需要創立完全嶄新的方法。很自然地，當代的許多最傑出的學者，立刻在這類問題上做了很大的努力。當然，對當時的學者們來說，那種使得這類問題區別於以往一切問題的關鍵所在，還是沒有幾位眞正能够看透的，在今天，就不成問題了，我們淸楚地知道：歸結起來，新問題要求我們這樣來研究實際碰到的那些量，在研究的時候，不是把注意力集中在這些量在這個或那個時刻的個別的值，而是要集中地注意在給定的現象中，這些量的變化本身的特性。

跟通常在數學科學中任何一個新部門的產生一樣，解決新問題的方法，是逐漸在研究個別的一些具體問題的過程中成長並發展起來的，至於這些方法的共同之點，足以構成這門科學的理論基礎的一般原則，却總是被注意和闡釋得要晚一些，而且只是在大量地解决了這一類的具體問題之後，才能充分地被意識到。從現代的觀點來看，可以很淸楚地看到，這裏所述的絕大部分的問題可以歸結成兩類中心問題，那就是我們現在所謂的函數的**微分**問題與**積分**問題。這兩方面問題所牽涉到的基礎概念，都是函數的概念，也就是說，確切地依賴於另一個量的變化而變化的量的概念。因此，從方法論的觀點來看，實際生活向新科學所提出的要求，完全符合於認識自然的辯證法的原則：不要在瞬時狀

態中，而要在它的變化過程中來研究變量，不要彼此孤立地，而要在它們的緊密聯系之中來研究變量。恩格斯在後來完全正確地指出，運動與辯證法，跟隨着作爲研究的主要對象的變量，同時進入了數學。

十七世紀的所有的最出色的科學家，幾乎都曾經從事於創立這一門新科學。它的基本輪廓直到十七世紀末，才在牛頓與萊布尼茲的那些重要著作中，被足够清楚地刻畫出來。我們通常都把牛頓和萊布尼茲的這些著作的出現，算作是微積分學誕生的日子。牛頓與萊布尼茲彼此獨立地，並且在稍有不同的方法論的基礎上，各自推廣了他們的許多前輩的研究，第一次給出了這門新科學的相當普遍並且相當嚴整的敍述。在他們的敍述裏面，函數的微分法和積分法的關係（這個關係指出了數學分析中這兩個基本運算的互逆的性質）（§50）破天荒第一次佔有了中心地位，此後，這個關係就歷史地成爲這門科學進一步發展的主要動力；這就是被公認爲這兩位偉大的科學家的最重要的貢獻。在數學裏引進無窮級數也是他們的功績，無窮級數很快地就成爲數學分析裏最重要的研究工具。

II

從十八世紀起，隨着一方面在數學內部創立了許多新的豐富的科學部門（微分方程，變分法，以後是積分方程，一般汎函分析等等），同時另一方面，“無窮小量分析”的方法日益擴大地滲入到許多實用的領域中去，於是微積分學開始迅速地發展起來。可以毫不誇大地說，在全部數學史中，還沒有過另外一個時代，在如此短的一個歷史時期之內能够產生這樣多的決定性的成就，這些成就從根本上改變了數學的面貌，並且無限地豐富了它的內容。

在微積分學裏給出了一些中值定理，結合着無窮級數概念的發展，這些定理引導着把函數展開成級數，首先是展開成冪級數，並且使得我們可以精確地來研究這些展開式。函數的一些積分方法也很快地被推

廣了，由積分手續所引起的一些新的超越函數，特別是含參變量的積分(見第二十六章的開始部分)所確定的一系列重要的函數得到了系統的研究。微積分的概念完完全全地被擴充到了多元函數的情形。在參與這些工作的數學家中，即使我們僅僅想把那些最出色的名字列舉出來也是不可能的。不過我們畢竟還是應當指出這個新時代的初期的兩個偉大的科學家——尤拉與拉格朗日——的突出的成就。他們都是許許多多新方向的首創人，這些方向在以後的分析的發展中顯得最有活力。彼得堡科學院院士尤拉，不僅以他的一系列的專門研究（“尤拉替換”，§63，“尤拉積分”，§112，關於齊次函數的定理，§93，等等）而知名，而且是微分方程與變分法理論的首創人之一；他還推廣了牛頓所引進的無窮級數的概念並且把它系統化，他又是第一個提出了解析函數這個非常重要的概念的人；最後，在尤拉的工作裏，有着大量的各色各樣的實際問題，他曾經應用許多新方法解决了這些問題。拉格朗日則是“中值定理”這個基本工具的發現人，並且首先系統地應用了這些定理，特別是用來估計了戴勞級數的餘項，以及一般地，系統地把冪級數發展成了研究函數的重要工具；其次，變分法原理第一次被他有系統地建成了數學分析的獨立的一支，他引進了變分的概念，並且確立了變分運算的一套形式的規則。可是，拉格朗日在新領域中的最有意義的工作，還要算是“分析力學”的創立——他用無窮小量分析的方法，系統地建立了理論力學的基礎。在尤拉的工作之後，這大概是這方面的第一部有系統的著作；同時，它是如此的完善，儘管力學在以後有着相當大的發展，但直到今天它仍然保留着它的重要意義。

隨着力學的發展，部分地與它同時，無窮小量分析的方法開始迅速地滲入到數學的其他一些部門（幾何），以及所有那些日益發展着的實用部門。在各種應用之中，使用這種新方法而在後來顯得大有成效的，首先要算整個一系列的理論物理的部門(熱學，聲學，電動力學，擴散理論，以及許多別的)以及概率論(貝奴里，摩阿弗，拉普拉斯)。數學分析

的方法逐漸滲入到一系列的理論的與實際的部門的這個過程，一直延續到整個的十九世紀；甚至於就在今天也還在繼續着，微積分學已經發展到這樣一個地步，爲了實用的目的，每一個工程師都必須熟悉這門科學的基本原理。回顧一下無窮小量方法的這些逐步取得勝利的歷史，我們就十分清楚其所以造成這樣一往直前發展的主要原因。毫無疑問地，是由於這個方法符合於辯證唯物主義的認識論的要求，因而它能成爲這樣一個數學工具，通過它自己的形式，能够最好地掌握住大多數客觀現象的特徵。

III.

如果說，在整個十八世紀，無窮小量方法，由於它的豐富的內容，已經獲得了輝煌的，前所未有的實際成果，那麼這個新的科學部門的邏輯基礎的情形却完全是另外一回事。隨着這樣多的令人頭暈目眩的各方面的成就，微積分學，包括它的各色各樣的應用，被如此神速地建立起來，使得人們來不及檢查和鞏固這一門科學的基礎。實際上，數學分析的基礎的情况也的確是非常不順利的。我們這本教程所賴以建立的那個邏輯基礎，基本上在十九世紀就建立起來了；但是在十八世紀，就連本書第二章裏介紹的那些極限的初步理論（這個理論，我們曾經不得不在隨後用兩章的篇幅來使它嚴密完善，以達到現代科學所要求的水平）——就連這個並不完善的理論，也還沒有人知道。

當時的特殊局面是：數學分析的任何一個最基本的概念都還沒有怎樣精確地被定義出來；無窮小量究竟是什麼，這個問題，人們無盡無休地討論着，但是從邏輯基礎的觀點來看，這些爭論都落了空，因爲爭論的雙方大都除了一些模糊不清，毫無所謂的說法之外，就什麼也提不出來。關於連續性，微分，導數，積分這些概念的情形也都是這樣。只要想一想這樣一樁事情——你要把所有這些概念教給一個毫無極限觀念的人——你立刻就會感到，除了一些決不能够算是嚴格的描述之外，

你不可能給他任何東西[1]。

在今天，我們認為微分學的第一個基本概念是導數的概念，微分在我們看來是第二性的概念，是通過導數來定義的。但是在十八世紀，正相反，照例把微分的概念（雖然在牛頓以及尤拉與拉格朗日的工作裏，我們已經就遇到了與現在的了解非常相近的概念）算作是最基本的。那麼，我們的前輩們究竟認為微分是什麼東西呢？如果是 y 是 x 的連續函數，則跟改變量 Δx 一起，Δy 可以變得任意地小，並且每一個 Δx 的值對應一個完全確定的 Δy 的值。當時人們這樣設想，在那個最後的一會兒，在 Δx 與 Δy 都變成零之前，它們都取得自己的"最後的"值，這些值，要比它們可能取到的所有其他的值都小，但仍然還不是零。就正是這些值被叫做量 x 與 y 的無窮小改變量，或者它們的微分，並且記作 dx 與 dy；它們的比 $y'=\dfrac{dy}{dx}$（可以相除，因為 dx 還不是零！）稱為 y 對 x 的導數。這樣一來，微分就不是瞭解作變量，而是瞭解作一個常量，而導數，也並不是作為變動的改變量之比的極限，而是作為兩個固定的改變量的眞正的比值來瞭解的。與此相關，無窮小量的一般概念具有同樣的一些性質：把無窮小想像作一個遞減的量的最後階段，它的值，要算作是比所有其他的值都小，僅僅只有零在它之後，而它本身仍然還是與零有區別。這樣一來，它就是一個不能再減小的常量；所以這樣一些量常常又被叫做是"不可分的"量。完全與此相應地，積分沒有被看作是項數無限增加而每一項都無限減小的和數的極限，却是看作是無限多個這種"不可分的"量的眞正的和。同樣的原因——由於缺乏極限過程的精確概念——就使得無窮級數的和被看成是對無限多項進行眞正的加法運算的結果。這樣來瞭解級數的求和，當然沒有可能多少精確一點地定義收斂性的概念；不規定級數的收斂性，而是不負責任地運用級數，這要算是那一個數學時代的渣滓，這樣一些東西常常引導到自

[1] 還是應該指出，有一些個別的具有很強的智力的人，對於這些新概念的瞭解，在某些地方曾經接近於現代的水平。

相矛盾以及根本錯誤的結果。

所有這一系列的觀點都不可能繼續維持下來，因爲，只要當我們要求稍微精確一點來敍述問題時，我們就會發現這些內在的，在邏輯上自相矛盾的地方——當然，這一點在今天對我們每一個人來說都是很清楚的了。其實，就是十八世紀的數學家，或者至少是他們當中的許多人，也都明知道這一門新科學是建立在很壞的邏輯基礎之上的。跟我們不同的是，他們沒有能够把什麼更可靠的根據來和這個基礎加以比較。逐漸地，有許多的著作發表了出來，在這些著作裏，數學分析的邏輯基礎遭到了嚴厲的批評，有時甚至是嘲笑和譏諷。可是，這個新科學的成就是如此之多，又是如此之有意義，以至於這一類的疑問也並沒有能够阻止這一門新科學的建設者們的强大的創作熱潮。他們繼續迅速地建立着這一門科學，延緩了修改和鞏固基礎的工作。在歷史上，達朗貝爾有一句名言恰好說出了當時的這種情況，他說："向前進，你就會產生信念。"

IV

這個信念實際上是產生了，不過那已經是在十九世紀了，當時，數學分析本身以及它的最重要的應用裏，許多最迫切最成熟的問題已經基本上獲得解決。這時，一方面，人們不必像從前那樣急於解決新問題，而能够抽出一部分力量來重新改建基礎；另一方面，新理論已經成長起來的科學成熟性，照例總是刺激着批判的傾向，使得再延遲奠立數學分析的邏輯基礎的工作，變成是不能容忍的事情了。

在十九世紀的二十年代，出現了幾本分析的教程（首先是哥西的"分析教程"），在這些教程裏，數學分析是系統地建立在新的基礎之上的——建立在現在所了解的極限過程的觀念上的。在這裏我們首先遇到的就是像無窮小量，連續性，微分與積分這些概念的嚴格定義；無窮級數的和已經解釋爲部分和的極限，而不再是無窮多個數的和，這樣就

能夠給出收斂性的精確定義，並且嚴格禁止着使用發散級數。積分的存在性與微分方程解的存在性的證明也第一次給出來了。當然，跟一切類似的情形一樣，决不能認爲這個基礎的改建是哥西一個人的工作；對於許多新的觀念來說，時機已經成熟了，它們已經成爲迫切需要的東西，而且在很多必要的方面，在那一時代許多傑出的學者的思想裏已經形成了。哥西的"教程"發表的幾年之前，捷克的哲學數學家波耳查諾就已經得到了一系列的結果，這些結果包括了我們在哥西的"教程"裏所看到的許多東西，特別說來，包括了現在的連續性的精確定義，同時也給出了處處沒有導數的連續函數的第一個例子。在建立無窮級數的嚴格理論的工作上，與哥西同時，阿貝爾也得到了許多基本的結果。但是，毫無疑義，哥西在他的"教程"裏破天荒第一次發表了大量的，建立在新的邏輯基礎之上，並且包括了一切基本問題的關於無窮小量分析的論著；在很長的時期內，這本書就成了發揮這個主題的其他論著的典範。但是，哥西的概念在茲後的十年中，終究還是需要有一些個別的精確化甚至作某些修正；例如，在哥西的工作裏沒有級數的一致收斂性的概念；在他的教程裏有如下這個定理(當然，現在知道，這是不正確的)：如果一個函數級數的每一項都在某一個區間上連續，則它的和在該區間上也一定連續。雖然極限概念本身在原則上一直保留到今天也沒有什麼改變，但到了後來畢竟還是需要更精確的描述，我們在 § 14 與§ 15 兩節中所講的，以後貫穿全書我們所用到的極限概念，就是這樣加工的結果。

哥西時代之後，在數學分析邏輯基礎的發展史上最突出的事件，無疑地要算是十九世紀七十年代實數的一般理論的建立了。建立這個理論的必要性在那些年代已經感到是那樣尖銳，就正像在十九世紀初數學家感到有在精確的意義下研究無窮小量的必要性一樣。在第四章裏我們曾經詳細地論證了，爲什麼沒有連續統的一般理論，數學分析的基礎就不能完成；在那裏我們還提出了建立這種理論的簡單方法之一。

在十九世紀的七十年代，這種理論同時有幾個出現；所有這些出現的理論，都是完全令人滿意的，它們都有各自優點，並且就整個說來，在形式邏輯的意義下彼此等價。在這些理論的創造者當中，首先應該提出來的是：維爾斯脫拉斯，戴德肯特以及康脫。

當然，實數理論不能算作是數學分析的一章。這個理論的建立是數論與集合論的任務。但是，實數構成了數學分析生活與發展的環境，所以在這個環境還沒有被徹底研究以前，分析的完滿的基礎是不可能建立起來的。因此，只有在連續統的完善的一般理論建立之後，數學分析才能得到像現在這樣的面貌。

V

不言而喻，隨着基礎的修正和加强，數學分析本身的理論結構也繼續發展了，並且，直到現在爲止還在繼續向前發展着。在十九世紀的前半世紀，學者們的注意力還是强烈地集中在積分學的問題上。積分成初等函數的可能性問題的研究；利用初等函數（特別說來，代數函數）的原函數或者利用含參變量的積分所確定的新超越函數的研究；多維（多重）積分的一般理論的完成以及其他一系列的問題都得到了精密的研究。

然而，從十九世紀的後半葉起，分析學家的科學興趣的重心開始逐漸轉移到了分析的高級部門，首先是微分方程理論，這一方面的問題現在還在分析的問題中佔據着中心地位。在十九世紀末，增加了一個完全新的領域——積分方程與積微分方程，由於可以有很多的實際應用，這個理論很快地就引起了極大的注意。最後，從十八世紀開始系統地發展起來的變分法，在最後十年內日益被考慮作非常廣泛與非常重要的一個新領域——汎函分析——的特殊問題，這個新領域的普遍發展引起了數學家們越來越大的興趣。

因此，如果我們把數學分析的名字了解爲不僅是微分學與積分學，

而是了解爲建立在它們之上的分析科學的高級部門的全體，則這一科學的範圍是在無限制地擴充着的，並且絕不會有一天能夠說它的問題已經完全解決了，因爲歷史證明了，還在一個範圍內的問題完成之前，又總是在這些問題的基礎上，產生出另外一些新問題，要求着刻不容緩的注意。

VI

從十九世紀起，俄羅斯數學家——起初是個別的學者，然後是强大的數學學派——就參加了數學分析的發展的工作。在十九世紀與二十世紀的前半葉，我們祖國的科學家在這方面的貢獻，大到毫無疑問地應當單獨地來加以敍述。尤其是俄羅斯學者們在這個領域內的著作，我們就會看到，除了巨大的科學價值而外，還顯現出一種獨特的風格，截然不同於外國數學家的作品。

如所周知，我國偉大的幾何學者 Н. И. 羅拔切夫斯基幾乎不曾從事過數學分析的問題的研究；但是妙在他所發表的意見，就其深刻與重要程度來說，超過了他那個時代的專家們的觀點。例如，函數關係概念的現代定義（這是現實主義的內容豐富的方法戰勝形式主義的結果），通常總是與迪里赫勒的名字聯在一起的，但是在若干年前羅拔切夫斯基就已經很明白地說過了❶；在他的說法中，很明顯地强調了，就量 y 對於量 x 的函數依賴關係來說，重要的，只是對於每一個量 x 的值，都要對應有確定的量 y 的值，**而不是確定這個對應關係時所用的方法**。而這一點正是迪里赫勒定義的精髓。

在我們這本教程中，我們兩次遇到卓越的俄羅斯數學家 М. В. 奥斯特洛格拉得斯基的名字；除了他所發現的著名的有理函數的積分方法(§ 61)，以及把展佈在三維區域上的三重積分用展佈在這個區域的

❶ 參考 Б. В. Гнеденко，俄羅斯數學史，國家技術理論書籍出版社，1946，96 頁。

表面上的二重積分來表示的著名公式外❶，在積分學方面，奧斯特洛格拉得斯基還有一系列具有基本意義的結果；特別是他第一個證明了在多重積分中變量替換的公式，以及揭露了在這樣的替換中所謂"函數行列式"或者"雅可賓"（這個命名是由於德國數學家雅可比的名字的緣故，在上面提到的奧斯特洛格拉得斯基的可惜始終不曾公佈的發現之後，他才研究了這種行列式的性質）所起的作用❷。

奧斯特洛格拉得斯基在分析力學與變分法方面也有深刻的重要研究。他的全部工作(除了以上列舉出來的以外，他還研究過彈道學、天體力學、概率論、代數函數論等等)的風格的特徵，就是對於實用知識具有深厚的興趣，與力求把數學問題提得儘可能的廣泛，非常一般的形式，並且解決得無可非議的嚴格。

在十九世紀中葉，卓越的俄羅斯分析學家 П. Л. 車貝謝夫開始進行研究。車貝謝夫是屬於那種在數學科學的各個領域中以同樣的興趣進行工作，並獲得同樣成果的數學家中的一個。他研究了積分學，用多項式逼近函數，各種插值法，數論，概率論與力學等問題；幾乎在每一個這些領域中，他都建立了新的強有力的方法，這些方法的應用成爲他的學生與後繼者們在幾十年內的工作活動範圍。他的關於用多項式逼近函數的學說，發展到現在已經成爲巨大的獨立的數學分支——"構造函數論"。他在概率論方面的工作，改變了這門科學的面貌，他第一個指出了概率論的一般問題，並且建立了解決這些問題的方法。在數論方面，車貝謝夫一方面大大地推進了長久停滯不前的關於質數在自然數列中的分佈問題，另一方面他首先提出並解決了丢翻圖逼近理論的非齊次問題，在這兩方面他爲後來的人們開闢了到現在爲止還沒有枯竭的活動範圍。車貝謝夫在力學方面的工作，無論就理論來說或是就

❶ M. B. 奧斯特洛格拉得斯基解決了在任意多維空間中的這個問題，就是建立了用 $(n-1)$ 重積分來計算 n 重積分的一般公式。

❷ 在這本書中，我們稱它爲"奧斯特洛格拉得斯基行列式"。

實踐來說，直到現在都還沒有失去它的意義。在本書的數學分析的範圍內，車貝謝夫在積分成初等函數這個艱難問題上作了一系列的研究，特別著名的是關於二項型微分的積分定理（§64）。此外，車貝謝夫還發表了一些他在有理函數的積分，積分的近似計算，插値法與所謂“力矩問題”方面的重要工作。

車貝謝夫的著作的特徵，首先在於他的意圖與實踐的需要有着不可分離的聯系。在他的論文“地圖的繪製”中，車貝謝夫寫道：“理論與實際的聯系給出了最好的結果，而且得到好處的並不單單是實際方面；在實際的影響之下，科學本身也得到了發展：實際爲科學發現新的研究對象，或者已知對象的新的方面”。車貝謝夫的這種論點的一個最好的例子，是他從力學理論方面必需解決的一個具體的實際的重要問題出發，結果建立了用多項式逼近函數的理論的一般基礎。不僅如此，這個例子還生動地爲我們說明了車貝謝夫的科學著作的第二個特徵。車貝謝夫敏銳地關心着實際問題，但是幾乎從來不抱着僅僅解決這一個給定的問題的意願去接近向他提出的問題。正好相反，他總是力求把問題儘可能地提成一般的形式；他的目的永遠是建立儘可能廣泛的數學理論，除了已知的問題外，還包括着大量的別的類似的問題。數學科學的發展的全部歷史，證明了只有這條爲實踐服務的道路，對於所有的數學分支來說，才是最富有成果的。

車貝謝夫在俄國創立了第一個偉大的數學學派，它不久就獲得了優越的世界地位。車貝謝夫的一大批出色的學生（沙拉塔也夫，李雅普諾夫，馬爾可夫等等），一部分在他所指出的方向繼續研究，一部分注意於開闢新的科學領域。A. M. 李雅普諾夫的著名的工作，在數學分析的歷史上及其在物理方面的應用，是最重要的。李雅普諾夫在分析方面建立了新的方向，從力學與數學物理方向提出問題，並且很快地得到了獨立的數學意義。他研究的基本對象一方面是稀薄的物體的平衡條件（這對於天體狀態的論證非常重要），另一方面是力學體系的平衡

與運動的穩定與非穩定問題。在他的時代（十九世紀末葉與二十世紀初期），這些問題一般地引起了極大的注意；特別是李雅普諾夫與著名的法國學者潘加萊平行地工作，從事同樣問題的研究，指出這兩位學者的研究風格的差別是很有趣味的，因爲他們說明了俄國數學學派與許多西歐學派之間的對立。潘加萊在解決物理問題時常常容許不嚴格的推理，他這樣地理解並且宣稱："在力學中不能要求如在分析中那樣的嚴格"，李雅普諾夫則正好與此相反，在解決這些問題時要求絕對的不可動搖的推理，他說❶："只要我們在解決確定的問題，只要問題——力學或物理學方面都一樣——的提法從分析的觀點來看是完全確定的，那麼就不容許使用可疑的推理。這時，問題成爲純粹的分析問題，並且必需當作分析問題來對待"。很自然，在這樣的根本分歧之下，李雅普諾夫所建立的結果就比法國學者的成績更具有完善的與基本的性質。

李雅普諾夫第一個證明了非常重要的關於正交三角函數系的完備性的定理（§ 83）。在分析的應用領域裏，概率論方面的所謂"中心極限定理"，到現在爲止還是這個數學分支中的重要結果，就是他首先證明的。這個證明帶來了新的完全原始的方法，這個方法的一般基礎是在很後來才製定的，並且這個方法是概率的解析理論方面的最有效的方法之一。

柯娃列夫斯卡婭的科學著作在車貝謝夫學派中佔有獨特的地位。在她的工作中有兩個基本的成就：一個是屬於微分方程的理論方面的，另一個是關於有不動點的剛體運動的力學問題的。柯娃列夫斯卡婭的工作主要是在國外進行的，因爲在沙皇俄國，她作爲一個婦女不可能得到進行科學工作的必要條件。但是，全部她的科學著作都帶有俄羅斯數學學派的典型特徵。在這裏，我們同樣看到題目的無可非議的迫切性，對於實用科學的强有力的興趣，提出的問題的廣泛與一般化，以及

❶ 參考科學院物理數學部報告集，第8種，1905年，卷17，第38期，1—32 頁。

數學推理的嚴格性的嚴厲的要求，這些都是車貝謝夫以及他的學生們的工作特徵，他們給予了整個俄羅斯數學學派以與衆不同的不朽的風格，在這個意義上說來，是西歐任何學派所沒有的。

車貝謝夫學派再下一輩的工作已經有一部分在蘇維埃時代。屬於這一輩的有著名的數學分析的代表者，如 B. A. 司捷克洛夫與 C. H. 別恩斯坦，他們大大地充實了在微分方程理論，構造函數論以及一系列其他分支方面分析的寶庫，這裏也包括着實用方面的領域——數學物理與概率論。

在偉大的十月社會主義革命之後，蘇聯科學的普遍繁榮使得在數學分析方面的工作提到了最高度，無論就數量方面或者質量方面來說都是如此。科學，數學科學也包括在內，現在有比革命前多得多的工作者；而另一方面，對於科學工作計劃，科學機構以及科學出版事業的正確而內行的領導，和科學後備力量的細密的、有計劃的、具有高度權威的培養，保證了科學研究的質量的提高。蘇維埃數學分析工作者的隊伍，首先以我們的院士（C. H. 別恩斯坦，M. B. 闊爾得什，H. M. 克雷洛夫，M. A. 拉夫渊捷夫，H. Г. 彼得洛夫斯基，B. И. 司米爾諾夫，C. Л. 索波列夫）爲領導，已經得到一長串具有頭等意義的成績。忠實於光榮的俄羅斯數學傳統，帶着貢獻一切力量爲祖國與蘇維埃人民服務的熱烈願望，這個隊伍正滿懷信心地走向新的巨大的勝利。

推荐的習題按照 Б. П. 捷米多維奇“数学分析習題集”的第二版之索引

（在表的左边是本教程的頁数，而右边是在該頁上所推荐的習題按“習題集”第二版的号数）

教程的頁数	按照 Б. П. 捷米多維奇“習題集”第二版習題的号数
52	403—406
77	44, 46, 47, 49, 56, 58 66, 70, 83, 91, 127—130, 411, 416, 420, 425, 428, 437, 438, 439, 444, 471, 474, 475, 478, 479
96	675—686, 702—705, 736, 738, 759, 761
121	834—971, 991, 992, 998, 1010, 1011
130	1083, 1084, 1099, 1100, 1104
133	1091—1095
166	1268—1273, 1281, 1289
172	1414—1422, 1426, 1429—1443, 1445—1449, 1558, 1561, 1563, 1567, 1578, 1586
185	1794—1807
191	1674—1706, 1768—1790
211	2186, 2195, 2197
222	2206—2209
225	2239—2241
236	2431, 2444
253	2458, 2459, 2462, 2472, 2476, 2477, 2486
262	2552—2534
264	2535—2538
277	1863—1889
281	1891 1893
284	1926, 1927, 1931, 1933
287	1937—1940, 1966 1970

289	1981, 1982, 1990
294	2025—2027, 2029, 1991, 1995, 2013, 2014, 2034
296	2068, 2070, 2072, 2073, 2077
306	2546—2548, 2549, 2556—2557, 2559—2560, 2565, 2573, 2674
311	2578—2582
317	2598, 2602
321	2664—2667, 2675—2676, 2679, 2686
327	2706, 2711
334	3051, 3061, 3067, 3068, 3073
342	2746, 2747, 2749, 2751, 2767, 2768, 2770, 2774, 2734
353	2803, 2804, 2798
360	2814, 2815, 2827
364	2906, 2907—2911, 2914
373	2841—2844, 2851—2856, 2870, 2879, 2882, 2886, 2891, 2901, 2903
387	2940, 2942, 2961, 2962
403	2939, 2975, 2976
408	3181, 3182, 3202
418	3213—3228
424	3244(a), 3245(a), 3252
427	3341, 3342, 3344
432	3283—3285, 3371—3374, 3377, 3379
433	3231
437	3229, 3257, 3258, 3263—3265, 3307, 3309, 3311
442	3581, 3582, 3587, 3593, 3595, 3602, 3603
447	3621, 3625, 3626, 3637, 3694, 3695
450	1055—1057, 1060, 1062, 1077, 1079
452	3528, 3529, 3531, 3533
456	3539, 3540, 3549—3551

458	1298, 1299, 1302—1304, 1313
465	1595, 1596, 1600, 1604, 1605, 1606
472	3380, 3383, 3385, 3425
493	3654, 3655, 3660, 3663, 3672
506	2358, 2359, 2361, 2367
508	2620
517	2335, 2337, 2360
529	3732, 3733, 3733
590	3916—3924, 3926, 3932
596	3937—3940, 3943, 3944, 3951, 3953, 3955, 3957, 3958, 4008, 4009
600	4076—4078, 4087, 4088
604	4026, 4033, 4039, 4048
608	4134, 4136, 4143, 4144
617	4250, 4252, 4256
624	4298, 4299
629	4258, 4260, 4263, 4266
632	4284, 4286, 4293
641	4362, 4364
649	4376, 4377, 4387, 4388
661	4401, 4409, 4410, 4426, 4444, 4460

索　引

一　畫

二　畫

三　畫

四　畫

五　畫

七　　畫

八　　畫

九 畫

十 畫

十 一 畫

十二畫

十三畫

十四畫